BEDIENUNGSANLEITUNG FLUXION



FASSUNG 2.0

FÜR FLUXION VERSION 2

Kapitel 1

Einführung

In der Physik lassen sich viele Problemstellungen durch Veränderungsraten bzw. mit gewöhnlichen Differentialgleichungen beschreiben. Mit Fluxion können für diese Probleme ganz einfach numerische Lösung erstellt werden.
Mit diesem Handbuch werden die notwendigen Schritte und Grundlagen zur Bedienung von Fluxion erläutert und mit interaktiven Tutorials vertieft.



Programmkonzept

Mit Fluxion können Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen durch eine einfache gehaltene Eingabe schnell numerische berechnet werden. Der entscheidende Vorteil ist. dass dies auch ohne großes mathematisches Hintergrundwissen für analytische Lösungen von Differentialgleichungen möglich ist.

Startwerte und die bestimmenden Parameter der Systeme lassen sich benutzerfreundlich definieren und variieren. Dazu bietet Fluxion vielfältige Darstellungsmöglichkeiten, zum Beispiel gleichzeitiges Anzeigen von bis zu 4 Koordinatensystem. Die Achsenauftragungen der Koordinatensysteme können je nach Anforderung frei gewählt werden.

Für die Überprüfung von Experiment und Theorie können gemessene Daten importiert werden und mit den geplotteten Funktionen zusammen dargestellt werden.

Diese Bedienungsanleitung gibt einen Überblick über die Möglichkeiten die Fluxion bietet. Die wesentlichen Vorgehensweisen beim definieren der Modellgleichungen sind im Kapitel „Berechnungsangaben“ dargestellt .

Im Kapitel „Tutorials“ werden einige physikalische Probleme erklärt und im „Schritt für Schritt“-Verfahren mit Fluxion deren Lösung berechnet.

Ebenso werden die verwendeten Algorithmen für die numerische Approximation kurz erklärt und deren Genauigkeiten diskutiert. (siehe Kapitel Berechnungsverfahren“)

Installation und Programmstart

Fluxion ist ein Programm des Lehrstuhls „Physik und ihre Didaktik“ der Universität Würzburg. Alle entwickelten Software-Programme für den Einsatz in Schule und Studium sind erreichbar auf folgender Webseite:

http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de

Dort sind unteranderem der Vorgänger von Fluxion, das „Newton II“ sowie das ähnlich aufgebaute „Lagrange“ zu finden, welches Probleme nach dem Lagrange Formalismus lösen kann.

Überprüfen Sie zunächst, welche Java Laufzeitumgebung auf ihrem PC installiert ist. Fluxion benötigt mindestens Java 1.8

Hier der Link zum aktuellem Java Download:

http://java.com/de/download/

Da Fluxion auf Java basiert, kann es ohne Probleme unter Windows, Linux und Mac OS X, verwendet werden

Hier der Link zum Fluxion Download:

http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de/Fluxion/index.html

Wählen Sie auf der Webseite den Download für ihr Betriebsystem aus.

Installation unter Windows

Entpacken Sie die Zip-Datei „Fluxion_Jar.zip“, aus ihrem Download Ordner.

Starten Sie „Fluxion.exe“ durch Doppelklick.

Installation unter Mac OS X

Sofern nicht vom Browser automatisch durchgeführt, entpacken Sie die Zip-Datei „Fluxion_Jar.zip“, aus ihrem Download Ordner.

Starten Sie das (vom Browser) entpackte Programm „Fluxion“.

Installation unter Linux

Öffnen und entpacken Sie die Zip-Datei „Fluxion_Jar.zip“, aus ihrem Download Ordner.

In der Kommadozeile in den entpackten Ordner wechseln und das Programm mit dem Befehl "java -jar Fluxion.jar" starten.

Programmstart

Nach dem Öffnen des Programms wird zunächst das Startfenster angezeigt. In diesem können Sie ein

- Neues Projekt erstellen
- Vorhandenes Projekt öffnen
- Letztes Projekt verwenden

Mit dem Haken bei „Dieses Fenster beim Programmstart anzeigen“ können Sie auswählen, ob Fluxion beim Start über das Startfenster oder im Hauptfenster startet.



Programmaufbau

Im Folgenden gibt es einen ersten Überblick über die dreiteilige Programmoberfläche:

- Simulationsbereich
- Diagrammbereich
- Tabellenbereich

Programmoberfläche

Simulationsbereich **Diagrammbereich** **Tabellenbereich**

Menuzeile →

Modellgleichungen →

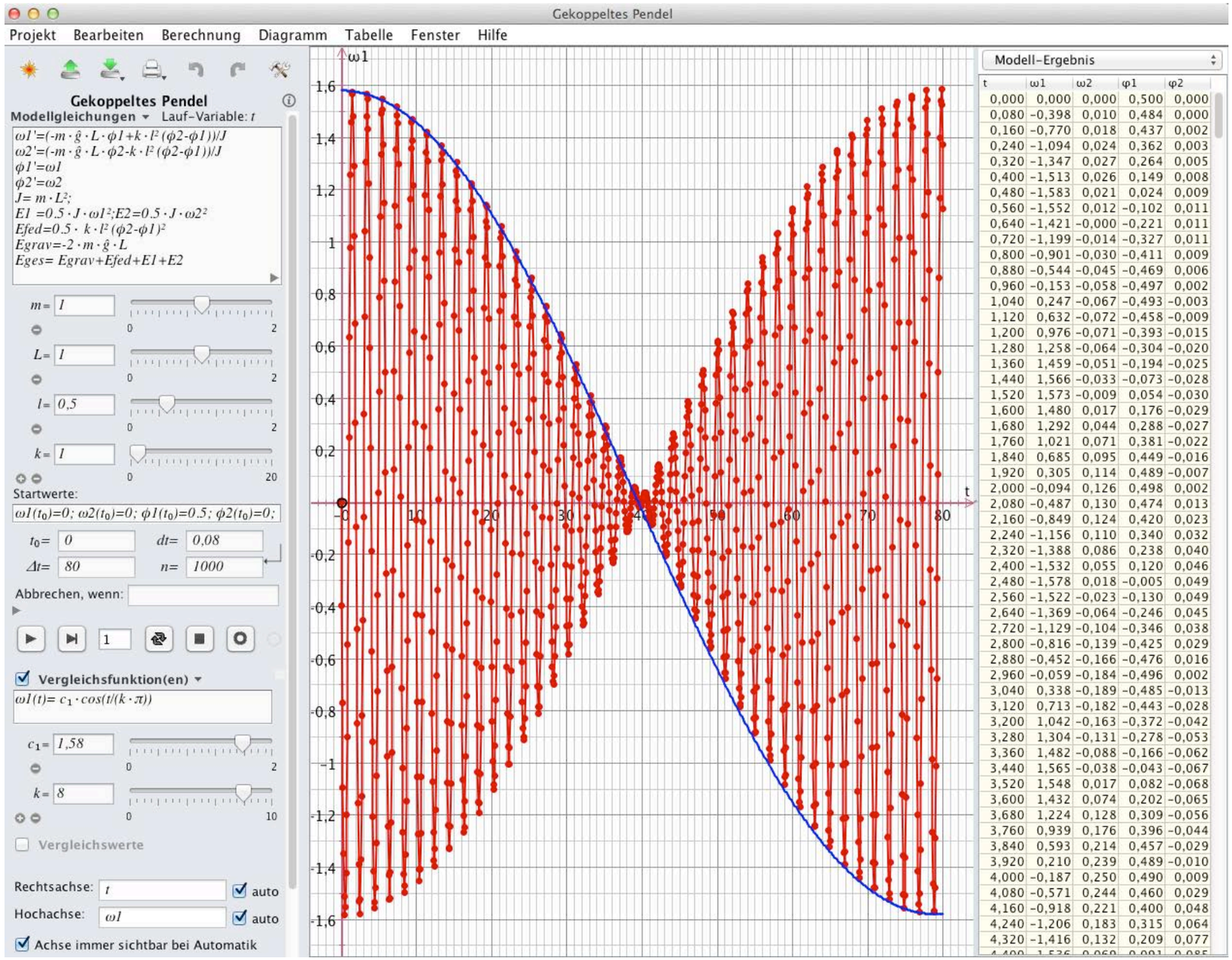
Veränderbare Parameter →

Startwerte →

Aktionsleiste →

Vergleichsfunktionen →

Koordinatensystem →



Die Programmoberfläche ist in drei Teile gegliedert. Im linken Teil befindet sich der Simulationsbereich für die Definition der Modellgleichungen und deren Parameter.

In der Mitte des Fensters wird der Diagrammbereich angezeigt, in welchem beliebig je nach Problemstellung eines aber aber auch bis zu 4 Koordinatensysteme gleichzeitig dargestellt werden können.

Am rechten Fensterrand lässt sich ein Tabellenbereich einblenden. In dieser Tabelle können entweder die berechneten Werte der numerischen Lösung, Werte einer Vergleichsfunktion angezeigt oder auch gemessene Werte eingetragen werden.

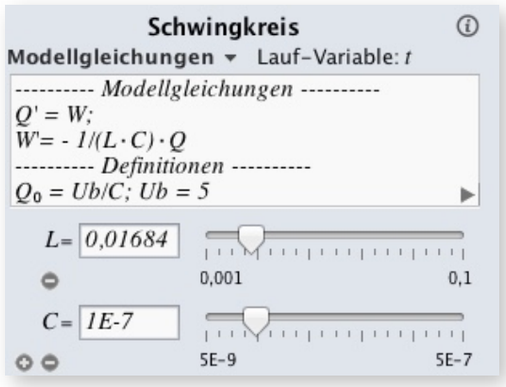
Der Titel des aktuellen Fensters zeigt immer automatisch den Namen des aktuell verwendeten Projektes an.

In der Menuzeile befinden sich noch weitere Funktionen. Diese werden ausführlich im Kaptiel „Menuzeile“ erklärt.

Simulationsbereich

Berechnungsangaben

Um eine Berechnung durchzuführen, benötigt Fluxion die explizite Angabe von gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL) und deren Parameter. Aus den Zusammenhängen der expliziten DGLs wird iterativ mit dem eingestellten Berechnungsverfahren (s.o.) aus der gewählten Laufvariable die gewünschten Größen berechnet.



Durch Klicken in die Eingabefelder öffnet sich ein zusätzliches Menu aus dem griechische Buchstaben, Indices und Naturkonstanten ausgewählt werden können. Bleibt man mit der Maus für kurze Zeit über einem Symbol stehen erscheint ein „Tool-Tip" (kleines gelbes Fenster) in welchem der Name des griechischen Buchstabens oder gegebenenfalls der Wert beziehungsweise Einheiten der Konstante auftauchen.

Modellgleichungen

Laufvariable

Zunächst muss für die Modellgleichungen eine Laufvariable festgelegt werden, für die Fluxion die iterativen Berechnungen ausgeben soll. Standardmäßig ist die Laufvariable **t** eingestellt. Diese kann ganz einfach durch Klicken hinter die Anzeige „Lauf-Variable" beliebig verändert werden.

Gleichungen

Die Gleichungen werden im Fenster „Modellgleichungen" eingegeben. Eine veränderliche Größe steht dazu in der ersten Ableitung auf der linken Seite der Gleichung, zum Beispiel für die Veränderung des Ortes steht die Geschwindigkeit:

Eingabe : x′ = v;

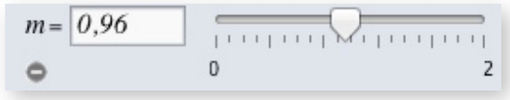
- Modellvariable ' = Berechnungsterm;
- Bezeichner = Wert;
- Bezeichner = Term;
- #Kommentartext

Einzelne Ausdrücke werden durch Semikolon oder Zeilenumbruch getrennt.

Alle verwendeten Bezeichner müssen entweder direkt im Eingabefeld oder darunter als veränderbarer Parameter definiert werden. Ist eine Variable nicht definiert, so wird dies unterhalb der Achsenoptionen in roter Schrift angezeigt und das fehlerhafte Eingabefeld wird rot hinterlegt.

Veränderbarer Parameter

Um Abhängigkeiten der Berechnungen von Parametern zu verdeutlichen, eignet sich die Definition eines oder mehrerer veränderbarer Parameter besonders gut. Einen neuen veränderbaren Parameter erstellt man durch Klick auf das Plus Symbol unterhalb des Definitions-Eingabefelds oder von bereits vorhandenen veränderbaren Parametern.



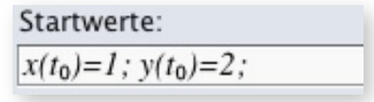
Der Name des Parameters kann nach Doppelklick auf den Parameternamen geändert werden. In gleicher Weise lassen sich Minimum und Maximum des Schiebereglers festlegen. Das Feld zeigt den aktuellen numerischen Wert des Parameters an. Auch eine Eingabe eines speziellen Wertes ist dort möglich.

Berechnungsoptionen

Startwerte

Für jede Differentialgleichung müssen immer zunächst die Startwerte angegeben werden, von welchen das System startet. Gibt man bei Fluxion keine Startwerte an, setzt Fluxion diese automatisch auf den Nullwert.

Die Eingabefelder für die Anfangswerte befinden sich unterhalb der veränderbaren Parameter:

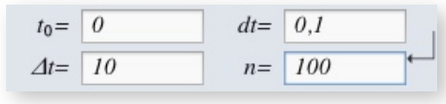


Es können auch mehrere Größen gleichzeitig Startwerte zugewiesen werden. Diese werden dann durch ein Semikolon getrennt eingegeben. Hier wurde der Startwert von **x** auf 1 sowie der Startwert von **y** auf 2 gesetzt.

Es ist möglich in den Feldern definierte Bezeichner (z. B. eines veränderbaren Parameters) oder auch ganze Terme anzugeben.

Zeiten für die Simulation

Im Feld t_0 wird die Startzeit der Simulation (üblicherweise 0) angegeben. Das Feld Δt gibt den Zeitraum der Berechnung ab t_0 vor, z.B: Für $t_0 = 1; \Delta t = 10$ läuft die Berechnung von $t = 1$ bis $t = 11$;



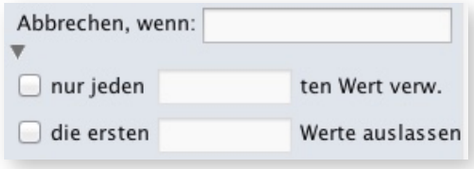
Das Feld **n** bestimmt die Anzahl an Berechnungsschritte, ebenso kann man auch die Schrittweite **dt** angeben. Das Programm berechnet dann selbst die Anzahl an Punkten **n** , die im vorgegebenen Intervall Δt. Man sollte immer auf eine problemangepasste Angabe achten, da sonst (bei zu grober Schrittweite) die Berechnungen unzverlässig sind oder zu lange dauern (bei zu geringer Schrittweite). Auch hängt die zu wählende Schrittweite vom Berechnungsverfahren ab. Hier gilt, je kleiner die Ordnung des Verfahrens umso kleiner muss die Schrittweite gewählt werden. Hinweis: Die Berechnung endet früher, falls eine eventuell angegebene Zusatzbedingung erfüllt ist.

Es ist möglich in den Feldern t_0 und Δt Terme anzugeben.

Abbruchbedingung

Abbrechen, wenn: .....

Wenn eine gültige Bedingung angegeben wurde, wird die Simulation vorzeitig unterbrochen, sobald die eingegebene Bedingung wahr ist. Verwenden Sie diese Option, wenn die Simulationszeit nicht von vorne herein vorgegeben ist, achten Sie aber auf einen genügend großen Wert von Δt.



Der Abbruch erfolgt sobald die angegebene Zeitspanne Δt oder die Bedingung erfüllt ist.

Durch Klick auf das graue Dreieck unter den Zeiteinstellungen, klappt das Optionsdreieck um und es besteht die Möglichkeit erweiterte Einstellungen für die Berechnung vorzunehmen.

nur jeden ....ten Wert verwenden

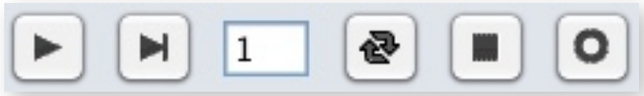
Wenn diese Option ausgewählt ist, wird die Berechnung wie üblich mit der Schrittweite Δt durchgeführt, jedoch wird nur der angegebene Teil der Werte in die Ergebnistabelle übernommen. Verwenden Sie diese Option, um eine Berechnung mit hoher Schrittgenauigkeit durchzuführen ohne dass die Kapazität des Computers erschöpft wird.

die ersten .....ten Werte auslassen

Um Einschwingvorgänge oder transiente Bewegungen auszublenden, verwenden Sie diese Option. Die angegebene Anzahl der berechneten Werte wird dann nicht in die Ergebnistabelle aufgenommen.

Aktionsleiste

Mit den Knöpfen der Aktionsleiste steuern Sie die Berechnungen. Im Folgenden wird die Funktionsweise der Knöpfe der Reihenfolge nach erläutert.



Kompletter Simulationsablauf:

Die Berechnung wird innerhalb aller Definitionen vollständig durchgeführt und dar- gestellt.

Schrittweiser Simulationsablauf:

Eine Berechnung nach der anderen wird durchgeführt und dargestellt. Der Graph kann somit sehr schön schrittweise entwickelt werden.

Festlegung der schrittweisen Simulation:

Legen sie fest wie viele Schritte sie innerhalb eines (schrittweisen) Simulationsablaufes durchführen möchten – diese Einstellung ist nur in Verbindung mit 2 möglich!

Kontinuierlicher Simulationsablauf:

Die Berechnung wird immer wieder komplett durchgeführt, so dass sich der Graph bei Veränderungen von Bedingungen, wie z. B. eines Schiebereglers, sofort verändert! Bei Neudefinitionen muss jedoch der kontinuierliche Modus ausgeschaltet werden, was durch Betätigung der Stopptaste (4) erreicht wird.

Kontinuierliche Berechnung stoppen:

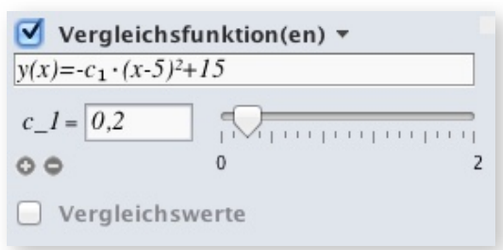
Der Modus „kontinuierlicher Simulationsablauf“ oder eine längere Berechnung wird gestoppt.

Löschen:

Die Berechnungen werden der Reihe nach gelöscht, d.h. nach erster Betätigung: die aktuelle bzw. die letzte Berechnung wird rückgängig gemacht und man hat die Möglichkeit z.B. andere Parameterwerte einzugeben; zweite Betätigung: alle vorangegangenen Berechnungen und Eingaben werden gelöscht und auch die Startwerte werden wieder auf Null gesetzt. Besonders nützlich wenn man abschnittsweise Berechnungen macht (siehe „als Startwerde setzen“).

Vergleichsfunktion(en)

Mit dieser Option kann man sich zusätzlich Funktionen einzeichnen lassen. Einfach den „Haken“ vor „Vergleichsfunktion“ auswählen und im Eingabefeld eine Vergleichsfunktion nach folgendem Muster festlegen: s(t) = Term : t = 1...5#100;



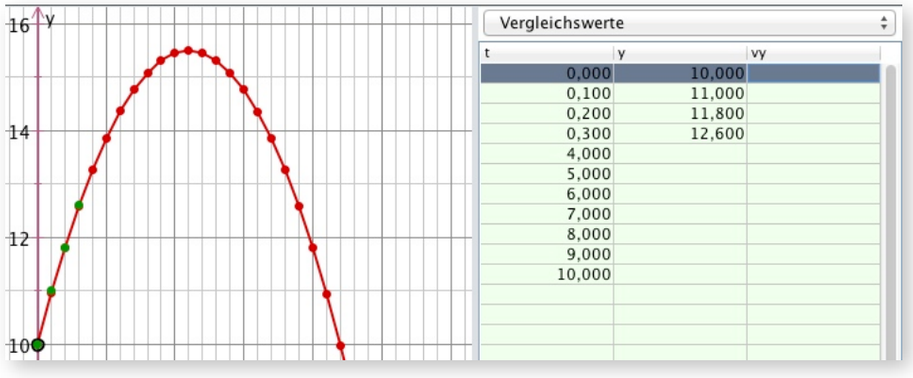
Die blau geschriebenen Teile sind optional. t = 1...5 bedeutet, dass die Funktion im Intervall von 1 bis 5 gezeichnet wird. #100 bedeutet,

dass in diesem Intervall 100 Punkte berechnet werden. Nach dem Semikolon können weitere Funktionen definiert werden.

Es ist darauf zu achten, dass der Funktionsname (hier **s**) mit den Achsenauftragungen der im Koordinatensysem dargestellten Variablen übereinstimmen, da sonst der Graf nicht gezeichnet wird. Spezielle, nur in der Vergleichsfunktion verwendete Parameter wie c_0 , c_1 usw. können im Feld „Zusatzdefinitionen“ eingegeben werden oder darunter als veränderbare Parameter definiert werden. Zur Funktionsweise der veränderbaren Parameter vergleiche man den Paragraph in „Berechnungsangaben“.

Vergleichswerte

Zum Vergleich der berechneten Werte mit anderen Werten (z. B. Berechnungen mit anderen Parametern oder Messdaten) können Vergleichswerte in das Diagramm mit eingezeichnet werden. Durch Auswahl des „Hakens“ vor „Vergleichswerte“ wird das Feld „Tabelle einblenden“ aktiv. Mit einem Klick auf „Tabelle“ erscheint im rechten Bereich des Darstellungsfensters eine Tabelle mit den vier Grundgrößen.



Nun können beliebig Werte in die einzelnen Spalten eingetragen werden. Durch Bestätigung mit der Enter-Taste oder einem Mausklick in der nächsten Spalte werden diese dann Darstellungsfenster als Punkte eingezeichnet.

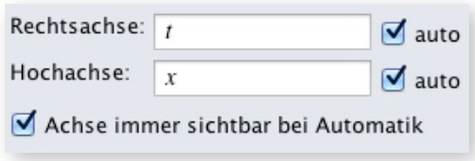
Man achte immer auf eine korrekte Eintragung in der entsprechenden Spalte bzw. der gewünschten Achsenauftragung im Darstellungsfenster, da sonst Werte nicht notwendigerweise eingezeichnet werden.

Über das Tabellenmenü kann die Tabelle wieder ausgeblendet werden, die Vergleichswerte bleiben aber erhalten. Auch beim Entfernen des Hakens bei „Vergleichswerte“ bleiben diese erhalten und werden nur nicht mehr angezeigt. Durch erneutes aktivieren der „Vergleichswerte“ stehen diese eingegebenen Vergleichswerte wieder zur Verfügung.

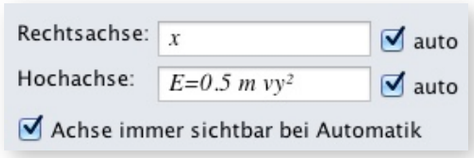
Diagrammbereich

Koordinatensystem

In die Eingabefelder von Rechts- und Hochachse können die Variablen eingetragen werden, die in der Grafik an den jeweiligen Achsen aufgetragen werden sollen.



Weiterhin kann die Auftragung durch Eingabe beliebiger Terme im dazugehörigen Eingabefeld angegeben werden, z.B..$E = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$.



Die Auswahlboxen „auto“ erlauben das Ein- und Ausschalten der automatischen Achsen-Skalierung. Bei eingeschalteter Auto-Skalierung wird der Darstellungsbereich so gewählt, dass alle Werte (auch Funktionswerte und Vergleichswerte) sichtbar sind. Hinweis: Ist in den Projekteinstellungen der Punkt „Achsen färben“ ausgewählt, so wird die jeweilige Achse bei automatischer Skalierung lila eingefärbt.

Wenn „Achsen immer sichtbar bei Automatik“ ausgewählt ist, so wird bei der automatischen Bereichswahl berücksichtigt, dass die Koordinatenachsen immer sichtbar sind. Dies erleichtert die Orientierung. Hinweis: Falls eine Achse nicht im angezeigten Bereich liegt, erscheinen zur Orientierung am Rand der Darstellung die Werte der Achseneinteilung in grau (statt schwarz).

Kontextmenu

Durch Rechtsklick in den Diagrammbereich öffnet sich das Kontextmenu über welches Funktionen und Einstellungen bezüglich des Diagrammbereichs vorgenommen werden können.



Zum einen Können mit „**Alle Werte kopieren**“ die aktuell Dargestellten Werte des aktiven Diagrammfenster in die Zwischenablage kopiert werden. Möchste man nur eine bestimmte Auswahl an Daten kopieren, ist dies durch selektives markiern möglich. Dabei klickt man mit der Maus vor den ersten auszuwählenden Datenpunkt, hält die Maus gedrückt und zieht den schwarzen Rahmen über die gewünschten Datenpunkte. Dabei färben sich die selektierten Datenpunkte blau. Lässt man die Maus nach dem letzten Datenpunkt wieder los können sie mit dem Befehl „**Auswahl kopieren**“ in die Zwi-

schenablage kopiert werden. Mit „**Auswahl aufheben**“ wird die aktuelle Auswahl widerrufen.

Ebenso ist es möglich nur eine bestimmte Auswahl an Daten zu Zeichen. Dabei markiert man, wie eben beschrieben die zu zeichnenden Datenpunkte und verwendet im Kontextmenu des Diagramms den Befehl „**Nur Auswahl Zeichnen**“.

Aus den gezeichneten Werten kann auch ein einzelner Datenpunkt ausgewählt werden, der als neuer Startwert für die folgende Berechnung gelten soll. Hierfür muss der Datenpunkt markiert werden und der Befehl „**Als neue Startwerte setzten**“ aus dem Kontextmenu ausgwählt werden.

Diese Funktion ist gedacht, um Berechnungen vollständig dastellen zu können, bei denen sich ein oder mehrere Parameterwerte zu einer gegebenen Zeit ändern.

Die Befehle für die Achseneinstellung aus dem Kontextmenu werden im folgenden Teil erklärt.

Achseneinstellungen

Die Achseneinstellungen können sowohl im Simulationsbereich als auch im Kontextmenu vorgenommen werden. Beide Achsen können von Fluxion an den Wertebereich angepasst werden. Dazu muss der Haken im Simulationsfenster hinter der Achsenauftragung „Rechtsachse/Hochachse“ bei „auto“ gesetzt werden. Genauso ist es möglich über das Kontextmenu den Befehl „**Automatische Achsen**“ für die jeweilige Achse auszuwählen.

Um beide Achsen gleich zu skalieren kann die Skalierung der einen Achse jeweils an die andere angepasst werden. Dies ist zum Beispiel im Kontextmenu mit „**Rechts- an Hochachse anpassen**“ möglich. Durch Klicken und halten der Maus auf einer Achse kann durch verziehen nach oben und unten die Skalierung im Diagrammfenster direkt verändert werden.

Für die Eingabe genauerer Achsenparameter lassen sich in einem extra Fenster die Achseneinstellungen durch Doppelklicken auf die Achse öffnen.



Entfernt man hinter den Eingabefenster den Haken bei „**auto**“, lassen sich die nötigen Werte für die Achsen für eine persönliche Skalierung eintragen.

Tabellenbereich

Über die Menuzeile „Tabelle-> Einblenden“ lässt sich der Tabellenbereich vom Fluxion ein und ausblenden. In diesem können die Simulationsergebnisse dargestellt werden oder Vergleichswerte zum Beispiel aus Messungen eingetragen werden.

Simulationswerte

Die Simulationswerte sind eingeblendet, wenn über der Tabelle „Modell Ergebnis“ im Auswahlmenu gewählt ist. Fluxion erstellt die Tabelle automatisch und zeigt die Werte der Berechnung (Simulation) an.

Modell-Ergebnis

t	vy	y	vx	x
0,000	0,000	10,000	0,000	0,000
0,100	-0,860	9,957	0,000	0,000
0,200	-1,720	9,828	0,000	0,000
0,300	-2,580	9,613	0,000	0,000
0,400	-3,440	9,312	0,000	0,000
0,500	-4,300	8,925	0,000	0,000
0,600	-5,160	8,452	0,000	0,000

Zieht man mit gedrückter Maus über einen bestimmten Datenbereich, wird dieser Datenbereich in der Tabelle selektiert und simultan im Diagramm blau markiert. So können auch gezielte Berechnungspunkte ausgewählt werden.

Über einen Rechtsklick in die Tabelle ist das Kontextmenu der Tabelle erreichbar. Die darin enthaltenen Funktionen können auch über die Menuzeile „Tabelle“ aufgerufen werden und werden somit auch im Abschnitt Menuzeile/Tabelle weiter erläutert.

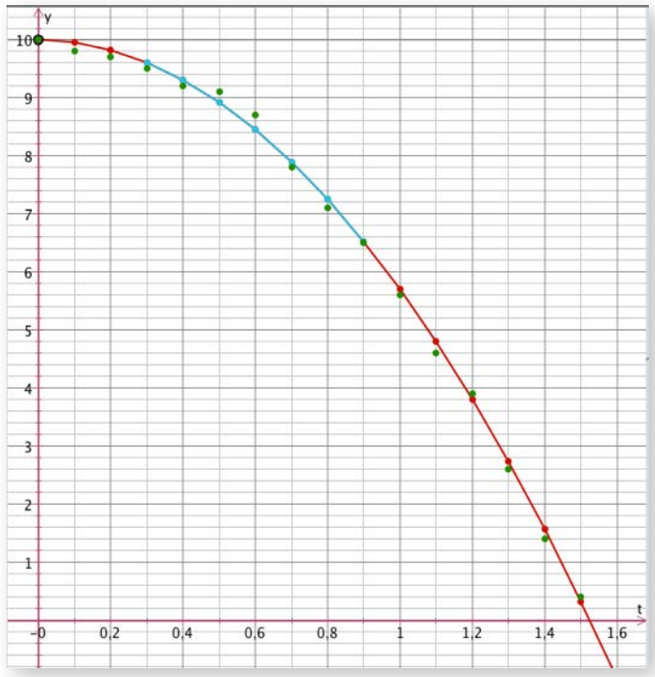
Vergleichswerte

Um die Vergeleichswerte in der Tabelle darzustellen, klickt man im das Auswahlmenu oberhalb der Tabelle auf „Vergleichswerte“. Nun können für die verschiedenen Variablen eigene bzw. experimentelle bestimmte Werte in die Tabelle eingetragen werden.

Um die Vergleichswerte darzustellen, muss im Simulationsbereich der Haken bei „Vergleichswerte“ gesetzt sein.



Jetzt werden die Vergleichswerte im Diagrammfenster als grüne Punkte angezeigt.



Importieren & Exportieren von Daten

Importieren

Zum Importieren von Messdaten aus einer externen Tabelle verwendet man einfach „Copy & Paste“. Dazu markiert man in einer externen Textdatei bzw. Tabelle die gewünschten Daten und kopiert diese mit „Rechtsklick->Kopieren“ bzw mit „Strg+C“.

Zum Einfügen in die „Vergleichswerte“-Tabelle wählt man die gewünschte Zeile aus und fügt die Daten per „Rechtsklick->Einfügen“ bzw. mit „Strg+V“ in die Tabelle ein.

Dabei ist zu beachten, dass in Fluxion die Tabellenbeschriftung durch das Programm selbst festgelegt ist. Somit müssen die zu importierenden Daten vor dem einfügen in die richtige Spaltenreihenfolge gebracht werden.

Exportieren

Zum Exportieren der Daten, können diese mit „Copy & Paste“ aus der Tabelle kopiert werden. Dazu markiert man die gewünschten Daten in der Tabelle und kopiert diese mit „Rechtsklick->Kopieren“ bzw mit „Strg+C“.

Neben dieser Funktion befindet sich in der Menuzeile (siehe Abschnitt Menuzeile) unter dem Menu Projekt der Punkt „Exportieren“ . Dort können folgende Optionen zum Exoprtieren der Daten Verwendet werden:

Projektdaten als Text:

Speichert die Gleichungsangaben als Text-datei (*.txt), um sie beispielsweise in anderen Programmen einzubinden.

Wertetabelle als Text:

Exportiert die berechneten Werte in einer Textdatei (*.txt). Die Spalten sind durch Tabulatoren getrennt. So können die berechneten Werte weiter verarbeitet wer- den.

Koordinatensystem als Grafik:

Speichert das selektierte Koordinatensystem als Vektor-Grafik in verschiedenen Formaten (*.svg, *.swf, *.emf, *.eps, *.pdf) ab. Empfehlenswert für die Einbindung in zu druckende Dokumente.

Koordinatensystem als Bild:

Speichert das selektierte Koordinatensystem als Bild in den Formaten (*.png, *.gif, *.jpg) ab. Empfohlen für bildschirm-orientierte Ausgabe (z.B. Webseiten) oder wenn die obigen Vektorformate nicht verarbeitet werden können.

Menuzeile

In der Menüzeile kann man alle wichtigen Funktionen von Fluxion anwählen. Viele der dort angebotenen Punkte können auch direkt über die Programmoberfläche aufgerufen werden. In der Menüzeile stehen folgende Menüpunkte zur Verfügung:

Programm (unter Mac OS „Fluxion“)

In diesem Menüpunkt befinden sich die programmbezogenen Auswahlmöglichkeiten. Dies sind:

Über Fluxion:

Durch Anklicken von „Über Fluxion“ öffnet sich ein zusätzliches Fenster, das die Version des installierten Fluxion Programms anzeigt.

Einstellungen:

Hier können Einstellungen zum Erscheinungsbild bzw. Sprache vorgenommen werden. Weiterhin ist es möglich ein Verzeichnis für direkt aufrufbare Beispiele zu wählen.

(siehe Kapitel Programmeinstellungen auf Seite 15)

Fluxion beenden:

„Fluxion beenden“ schließt das Programm – um möglichen Datenverlust zu verhindern, vergewissere man sich, dass das ausgeführte Projekt zuvor gespeichert wurde (siehe Projekt – Speichern).

Projekt

Hier befinden sich die nötigen Grundfunktionen zur Verwaltung eines Projekts.

Neues Projekt erstellen

Beim Erstellen eines neuen Projektes öffnet sich ein neues Fluxion-Fenster mit dem Titel „Neues Projekt“ als Darstellung des Projekts.

Datei öffnen

Durch Anklicken des „Öffnen“ Symbols öffnet sich ein Fenster zum Auswählen der Projekt-Datei.

Navigieren Sie wie gewohnt durch Ihre Ordner und wählen Sie die gewünschte Datei aus. Erkannt werden Fluxion Dateien (Endung .flxprj) und Dateien von Newton-II (Endung .n2prj)

Datei speichern

Bei einem Mausklick wird das Projekt gespeichert. Bei neu angelegten Projekten wird nach einem Speicherort gefragt. Unter „Speichern als...“ öffnet sich ein Fenster zur Auswahl des Speicherortes und Angabe des Dateinamens. Das Projekt wird nun unter dem angegebenen Namen am gewählten Ort als Fluxion Projekt-Datei gespeichert (wenn nicht angegeben, wird die Endung *.flxprj hinzugefügt).

Exportieren

Projektdaten als Text:

Speichert die Gleichungsangaben als Text-datei (*.txt) inklusice der Startwerte, um sie beispielsweise in anderen Programmen einzubinden.

Wertetabelle als Text:

Exportiert die berechneten Werte in einer Textdatei (*.txt). Die Spalten sind durch Tabulatoren getrennt. So können die berechneten Werte weiter verarbeitet werden.

Hinweis: Am Anfang der Datei werden die Projektdaten (s.o.) mitgespeichert.

Koordinatensystem als Grafik:

Speichert das selektierte Koordinatensystem als Vektor-Grafik in verschiedenen Formaten (*.svg, *.swf, *.emf, *.eps, *.pdf) ab. Empfehlenswert für die Einbindung in zu druckende Dokumente.

Koordinatensystem als Bild:

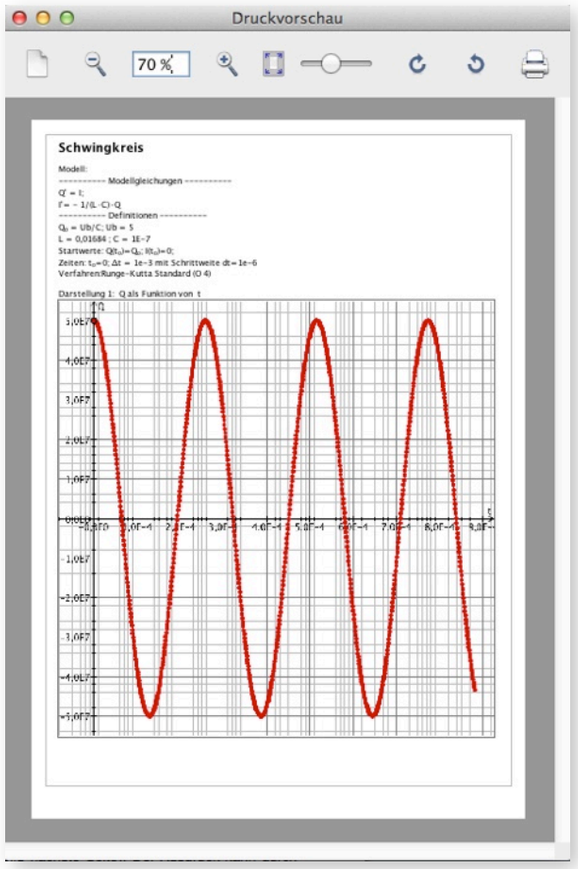
Speichert das selektierte Koordinatensystem als Bild in den Formaten (*.png, *.gif, *.jpg) ab. Empfohlen für bildschirmorientierte Ausgabe (z.B. Webseiten) oder wenn die obigen Vektorformate nicht verarbeitet werden können.

Drucken

Bei einem Klick auf das „Drucken“ Symbol werden alle gezeigten Koordinatensysteme auf einem Blatt zusammengefasst und eine Druckvorschau geöffnet.

Selektiertes Koordinatensystem Drucken

Druckt (bei Darstellung mehrerer Koordinatensysteme) nur das ausgewählte, blau umrandete Koordinatensystem.



Nach Wahl der zu druckenden Koordinatensysteme öffnet sich die Druckvorschau (s. Bild). Der Ausdruck kann durch Ziehen mit der Maus auf dem Papier verschoben und per Scrollrad vergrößert und verkleinert werden. Zusätzlich wird immer eine Beschreibung des Projektes auf dem Druck angezeigt. In der Kopfzeile des Druckvoschaufensters stehen folgende Symbole zur Verfügung (Reihenfolge von links nach rechts):



Ändern des Papierformats:
Öffnet einen Dialog zum Einstellen des Papierformats. Die Einstellungen sind System- und Druckerabhängig.



Darstellung verkleinern:
Zoomt aus der Darstellung heraus (auch mit Scrollrad möglich).



Angabe der Vergrößerung:
Prozentuale Angabe der Anzeigegröße.



Darstellung vergrößern:
Zoomt an die Darstellung heran (auch mit Scrollrad möglich).



Darstellung an das Fensteranpassen:
Passt die Darstellung der Druckvorschau an die Fenstergröße an, so dass die ganze Seite gezeigt wird.



Schieberegler - Einstellen der Ausgabegröße:
Ändert die Größe des Seiteninhalts. Der Seiteninhalt kann mit gedrückter Maustaste auf dem Blatt verschoben werden.



Ausgabe um 90° im Uhrzeigersinn drehen:
Dreht Text und Koordinatensysteme 90° in Uhrzeigerrichtung.

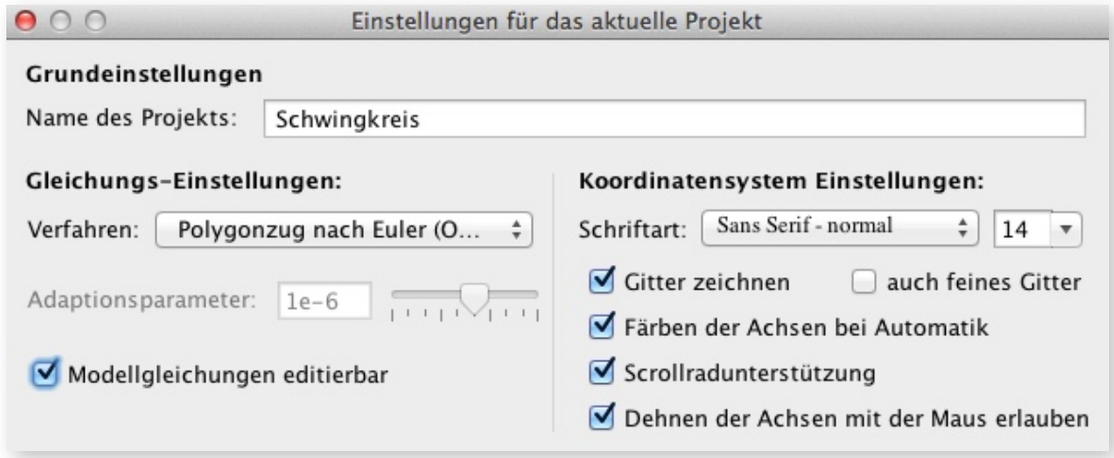


Ausgabe um 90° gegen den Uhrzeigersinn drehen
Dreht Text und Koordinatensysteme 90° in Uhrzeigerrichtung.



Starten des Druckauftrags:
Startet den Ausdruck

Projekteinstellungen



Bereich 1 - Gleichungen:
V e r f a h r e n :
Es kann zwischen 4 numerischen Berechnungsverfahren gewählt werden (aufgelistet nach der Genauigkeit der Berechnung), welche im Kapitel Berechnungsverfahren näher erläutert werden:

- Polygonzug nach Euler
- Trapezverfahren nach Heun
- Runge-Kutta Standard
- Runge-Kutta mit Schrittweitenanpassung

Bereich 2 - Koordinatensystem:
- Schriftart

Hier kann für die Achsenbeschriftung die Schriftart und deren Größe ausgewählt werden.

- Gitter zeichnen (auch feines Gitter)-

Wenn gewählt, wird in den Koordinatensystemen ein Gitter gemäß der Achseneinteilung bzw. der Feineinteilung eingezeichnet.

• Färben der Achsen bei Automatik
Wenn gewählt, wird eine Koordinatenachse bei automatischer Skalierung gefärbt dargestellt um die Automatik anzuzeigen.

• Scrollradunterstützung:
Wenn gewählt, kann im Diagramm mit dem Scrollrad herein und heraus gezoomt werden.

• Dehnen der Achsen mit der Maus erlauben:
Wenn gewählt, können die Achsen durch Anklicken und Ziehen mit der Maus bei gedrückter Maustaste gestreckt oder gestaucht werden.

Bearbeiten

Eingabe zurück:

Die zuletzt vom Benutzer getätigte Eingabe wird rückgängig gemacht.

Eingabe wiederherstellen:

Eine vom Benutzer rückgängig gemachte Eingabe wird wiederhergestellt.

Ausschneiden:

Mit der Maus ausgewählte Textbereiche oder Daten einer Tabelle werden entfernt und eine Kopie in die Zwischenablage gelegt. Sie können durch „Einfügen“ an gewünschter Stelle wiederhergestellt werden. Achtung: Es können immer nur die zuletzt ausgeschnittenen Daten eingefügt werden.

Kopieren:

Mit der Maus ausgewählte Datensätze oder anderweitige Schriftauszüge werden in die Zwischenablage kopiert und können anderweitig durch „Einfügen“ wieder eingesetzt werden. Achtung: Es können immer nur die zuletzt ausgeschnittenen Daten eingefügt werden.

Einfügen:

Die zuletzt ausgeschnittenen oder kopierten Daten werden an der Stelle, an der Benutzer gerade arbeitet, eingefügt.

Alles auswählen:

Je nachdem in welchem Bereich von Fluxion man sich befindet, d.h. Grafik- oder Defintionsbereiche, werden alle Punkte bzw. Angaben oder Definitionen ausgewählt. Sie werden farbig hinterlegt und können nun mit anderen Aktionen bearbeitet, z.B. ausgeschnitten oder kopiert werden.

Berechnungen

Hier befinden sich die Menüpunkte zur Steuerung der Simulation. Die einzelnen Funktionen finden sich ebenfalls in der Aktionsleiste (siehe Kapitel Programmaufbau Abschnitt Simulationsbereich)

- Einmalige Berechnung starten
- Nächste Schritte ausführen
- Ständige Berechnung starten
- Berechnung stoppen
- Letzte Berechnung löschen (entspricht einmaligem Klick auf die Lösch-Taste in der Aktionsleiste)

- Alle Berechnungen löschen (entspricht zwei- oder mehrmaligem Klick auf die Lösch-Taste in der Aktionsleiste)

Diagramm

Diagrammbereich maximieren:

Wenn eine Tabelle eingeblendet ist, so wird diese ausgeblendet um möglichst viel Platz für das Diagramm zur Verfügung zu haben.

Legende einblenden:

Es wird im rechten oberen Anzeigebereich von Fluxion eine Legende sichtbar, die alle eingezeichneten Punkte und Linien beschreibt.

Darstellungen:

Hier kann man wählen, wie viele Koordinatensysteme angezeigt werden sollen und in welcher Anordnung sie stehen sollen. Dabei können für jedes einzelne die Optionen, z. B. Auftragung und Anzeigebereich, unabhängig von den anderen ein- gestellt werden. Es stehen folgende Möglichkeiten zur Verfügung:

- Ein Koordinatensystem
- Zwei Koordinatensysteme nebeneinander
- Zwei Koordinatensysteme übereinander
- Drei Koordinatensysteme nebeneinander
- Drei Koordinatensysteme übereinander
- Vier Koordinatensysteme:

(Die nachfolgenden Optionen sind ebenfalls über ein Kontextmenü (Rechtsklick) im Anzeigefenster erreichbar):

Automatische Achsen:

Hier wird eingestellt, bei welchen Achsen die Automatische Bereichswahl angewandt werden soll (siehe Kapitel über Achsenauftragung auf Seite). Es gibt folgende Unterpunkte: Beide Achsen, Nur Rechtsachse, Nur Hochachse, ausgeschaltet.

Hoch- an Rechtsachse anpassen:

Die Skalierung der Hochachse wird an die Skalierung der Rechtsachse angepasst. Dies ist hilfreich um beispielsweise Kreise nicht als Ellipsen erscheinen zu lassen.

Rechts- an Hochachse anpassen:

Entsprechend zum obigen Menüpunkt.

Achsen immer sichtbar:

Bei einer automatischen Achsenskalierung sind, wenn angewählt, die Achsen immer im Darstellungsbereich.

Achse einstellen...:

Es öffnet sich ein Fenster, um die Einteilung der Achsen numerisch einzugeben.

Tabelle

Einblenden/Ausblenden:

Bei Klicken auf „Einblenden" erscheint im rechten Bereich des Darstellungsfenster eine Tabelle, die alle berechneten Werte für für die in der Modellgleichung angegebenen Variablen. Um die Tabelle wie-

der zu entfernen, erscheint bei angezeigter Tabelle im Menü-Punkt „Tabelle“ statt „Einblenden“ nun „Ausblenden“.

Alle Werte kopieren:

Alle Werte der angezeigten Tabelle werden in die Zwischenablage kopiert und können durch Einfügen für andere Zwecke (auch andere Programme) verwendet werden.

Auswahl kopieren:

Es werden die Werte von mit der Maus markierten Punkten kopiert.

Auswahl aufheben:

Eine mit der Maus markierte Auswahl von Punkten wird wieder aufgehoben.

Nur Auswahl zeichnen:

Nur eine mit der Maus markierte Auswahl wird im Anzeigebereich dargestellt.

Als neue Startwerte übernehmen:

Ein markierter Punkt wird als neuer Startwert für die neue Berechnung festgelegt.

Wissenschaftliche Notation/ Dezimale Notation:

Die Zahlenwerte in der Tabelle können auf zwei verschiedene Arten dargestellt werden: Als normale Dezimalzahl mit eins bis neun beliebigen Nachkommastellen (siehe nächster Abschnitt) oder als „wissenschaftliche Notation“ in der Form: xEy

z.B. 1,23E-4 entspricht $1{,}23 \cdot 10^{-4}$, also 0,000123 (in Dezimal Notation).

Nachkommastellen:

Man kann auswählen, auf wie viele Nachkommastellen die Werte in der Tabelle angegeben werden sollen. Angezeigt werden eine bis neun Nachkommastellen, die im entsprechenden Untermenü ausgewählt werden können.

Hilfe

Kurzübersicht:

Über diese Link gelangt man zu einer Einführung in das Programm, die dem Nutzer einen Quick-Start in Fluxion ermöglicht. Jedoch muss klar sein, dass dort nur die wichtigsten grundlegenden Aspekte zu Fluxion beschrieben werden.

Handbuch:

Es wird die Bildschirmversion dieses Handbuchs angezeigt, in der man alles Wissenswerte über die Benutzung von Fluxion erfährt.

Webseite besuchen:

Um neue Informationen z. B. über Updates zu Fluxion zu erhalten, kommen Sie einfach auf unsere Webseite.

E-Mail an den Autor:

Anregungen, Ideen, Verbesserungsvorschläge oder gar Probleme? Einfach eine Mail an den Autor senden und er versucht sein Bestes um Fluxion zu perfektionieren.

KAPITEL 3

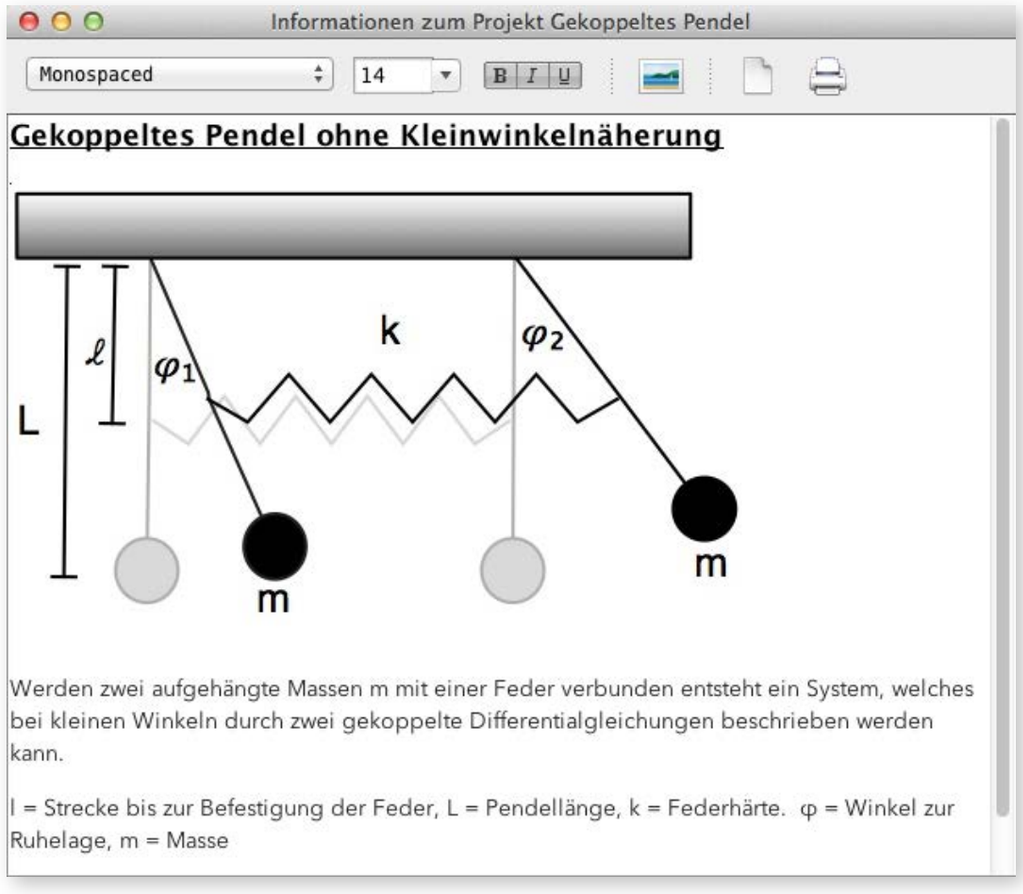
Weitere Funktionen



In diesem Kapitel lernen Sie, wie Sie nähere Projektinformationen angeben können, ebenso wie Sie für komplexere Problemstellungen Erweiterte Definitionen festlegen können.
Dazu werden die erleichternde Eingabefunktion „Smart Input“ und die allgemeinen Programmeinstellungen näher erläutert.

Projektinformationen

Durch Klicken auf das Informationssymbol neben dem Projektnamen, der hier ebenfalls geändert werden kann, öffnet sich ein Fenster, in dem Information zum laufenden Projekt eingegeben werden können. (Die mitgelieferten Beispiele sind mit Informationen versehen, die hier abgerufen werden können.)



In der Projektinformation können nähere Erläuterungen zum berechneten physikalischen Problem eingefügt werden.

Neben der Leiste zur Textformatierung stehen noch folgende Symbole zur Verfügung:



Importieren einer PNG oder JPEG-Datei:
Skizze als Bilddatei einfügen (PNG empfohlen)

(Achtung: Im Programm ist keine Skalierung des Bildes möglich)



Ändern des Papierformats:
Öffnet einen Dialog zum Einstellen des Papierformats. Die Einstellungen sind System- und Druckerabhängig.



Drucken:
Starten eines Druckauftrages der Projektinformationen

Es ist sinnvoll eventuelle versteckte Bedingungen anzugeben, die nicht sofort erkennbar sind. Diese sind zum Beispiel in den Erweiterten Definitionen zu deklarieren, welche im folgenden Abschnitt erklärt werden.

Erweiterte Definitionen

Im Eingabebereich der Modellgleichungen lassen sich noch weitere Definitionen festlegen um z.B. komplexere Probleme zu bearbeiten. Dazu zählen Konstanten, Funktionen, so wie Tabellen und bedingte Variablen.

Um die Erweiterten Definitionen aufzurufen, klickt man auf den Pfeil in der rechten unteren Ecke des Definitionsfeldes.

Darauf öffnet sich ein Fenster, in welchem links unten mit dem „Plus-Symbol" Objekte der Liste hinzugefügt werden können. Durch **Doppelklick** können Name und Typ des Objekts bearbeitet werden. Einmal festgelegt lässt sich der Typ nicht mehr verändern.

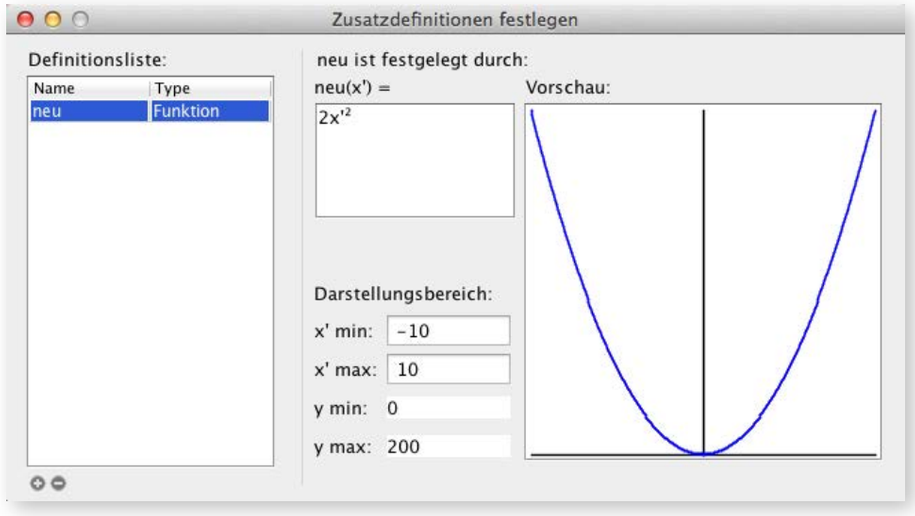


Konstanten/Variablen

Bei einer Konstanten oder Variablen wird im Eingabefeld rechts bei Konstanten der Wert, bzw. bei Variablen der Term eingegeben.

Funktionen

Bei einer Funktion wird im Definitionsfeld der Funktionsterm mit der Variablen eingegeben (z.B. $2x'^2$). Legt man den Darstellungsbereiches fest, zeigt Fluxion den Funktionsgraph im gewünschten Bereich in einer Vorschau.

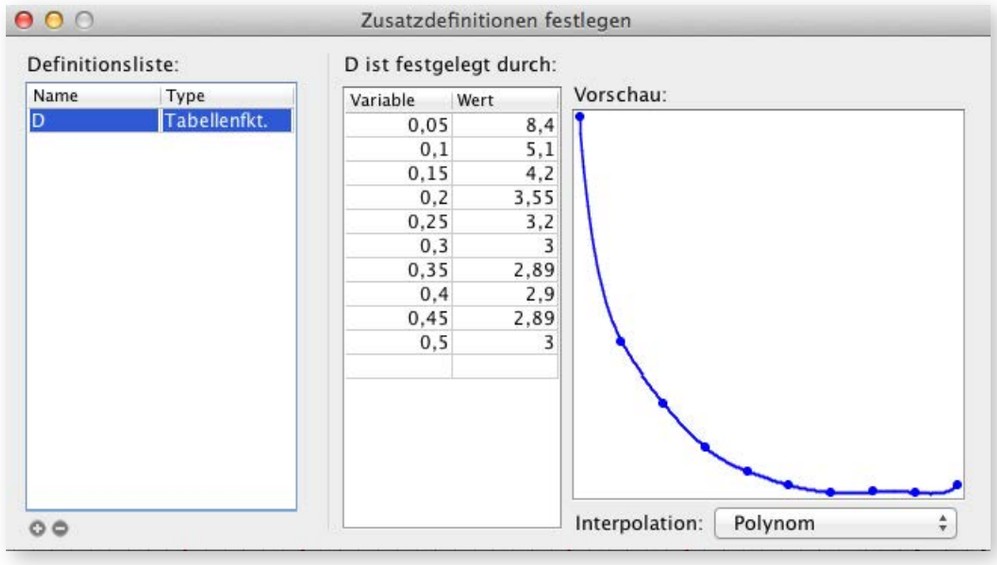


Tabellenfunktionen

Die Tabellenfuntion dient zur Festlegung von abhängigen Konstanten, z.B. Federkonstante eines Gummibandes. Dabei muss im Eingabefeld der Modellgleichungen die Abhängigkeit der Konstante vordefieniert werden:

$$a = -D(x) \cdot x / m;$$

Die experimentell bestimmten Werte für die Federkonstante können dann im Fenster „Zusatzdefinitionen“ eingefügt werden. Unter „Variable“ trägt man den Wert der Laufvariable ein und bei Wert den zugehörigen Wert der Konstante. Hier im Beispiel ist die Laufvariable x und die Konstante D.



In der Berechnung werden die Zwischenwerte interpoliert. Dazu können folgende Verfahren angegeben werden: linear, Polynom, kubische Splines. Im Diagramm wird die interpolierte Tabellenfunktion grafisch dargestellt.

Bedingungen

Soll eine Variable sprunghaft ihren Wert verändern ist es möglich eine „Wenn-dann-Bedingung“ für eine ausgewählte Variable fest zu legen:

- Bedingung *„Wenn“* - 1. gelbes Feld*:*
  Angabe eines Wahrheitsausdrucks
- Aktion *„Dann“* - 2. grünes Feld:
  Dieser Wert wird verwendet, wenn die im gelben Feld angegebene Bedingung erfüllt ist.
- Aktion *„Sonst“* - 3. rotes Feld:
  Dieser Wert wird verwendet, wenn die Bedingung nicht erfüllt ist.



Berechnet man zum Beispiel den Fall eines Fallschirmspringers ist es hilfreich ab einer gewissen Fallhöhe den plötzlichen Anstieg des Luftwiderstandes beim Öffnen des Schirms berücksichtigen zu können

Smart Input

Fluxion verfügt über die Option „Smart-Input“, die es dem Benutzer ermöglicht mathematische Ausdrücke schneller einzugeben. Es ist eine verkürzte „Eingabesprache“, die eine umständliche Eingabe von Sonderzeichen (Griechische Buchstaben, hoch- bzw. tiefgestellte Zahlen und physikalische Konstanten) erleichtert. (Zum ein/ausschalten von „Smart-Input“ siehe Abschnitt „Programmeinstellung“). Hierbei gelten folgende Abkürzungen:

Hoch- und tiefstehende Zahlen:

Allgemein kann für ausgewählte Indizes (0 bis 9) und Exponenten (2 und 3) die folgende Eingabetechnik verwendet werden:

	Eingabe	Bedeutung		Eingabe	Bedeutung
x_0	x_0	Index 0	x^2	x^2	hoch 2
x_1	x_1	Index 1	x^3	x^3	hoch 3

Multiplikation:

Die Multiplkation kann in Fluxion durch die Eingabe des Sternsymbols * durch das Symbol · dargestellt werden, sofern „Smart-Input“ aktiviert ist.

Griechische Buchstaben:

Durch Ausschreiben des Namens eines griechischen Buchstabens erscheint nach der Eingabe eines Zeichens (z.B. +,-,=, Leertaste, oder RETURN) der entsprechende griechische Buchstabe gemäß der folgenden Tabelle:

α	alpha	Α	Alpha	ν	nu	Ν	Nu
β	beta	Β	Beta	ξ	xi	Ξ	Xi
γ	gamma	Γ	Gamma	ο	omikron	Ο	Omikron
δ	delta	Δ	Delta	π	pi	Π	Pi
ε	epsilon	Ε	Epsilon	ρ	rho	Ρ	Rho
ζ	zeta	Ζ	Zeta	σ	sigma	Σ	Sigma
η	eta	Η	Eta	τ	tau	Τ	Tau
ϑ	theta	Θ	Theta	υ	ypsilon	Υ	Ypsilon
ι	jota	Ι	Jota	φ	phi	Φ	Phi
κ	kappa	Κ	Kappa	χ	chi	Χ	Chi
λ	lambda	Λ	Lambda	ψ	psi	Ψ	Psi
μ	mu	Μ	Mu	ω	omega	Ω	Omega

Hinweis:
Bei Verwendung der LaTeX-Schreibweise mit vorangestelltem Backslash (z.B. \alpha) wird der Buchstabe sofort ersetzt. Beachten Sie auch, dass in den Voreinstellungen (s.u.) dieses zur Bedingung gemacht werden kann.

Physikalische Konstanten:

Die gängigsten physikalischen Konstanten sind bei Fluxion bereits vorinstalliert und müssen nicht jedes Mal neu definiert werden:

	Eingabe	Konstante	Wert
ℯ	euler	Euler'sche Konstante	2,7182818
ĉ	light	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$2{,}99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
ĝ	gravit	Fallbeschleunigung norm	9,80665 m/s^2
Ĝ	Gravit	Gravitationskonstante	$6{,}673 \cdot 10^{-11}$ m^3/kgs^2
ê	qel	Elementarladung	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C
ɱ	mel	Masse eines Elektrons	$9{,}1094 \cdot 10^{-31}$ kg
ε_0	diel	Dielektrizitätskonstante	$8{,}8542 \cdot 10^{-31}$ C/Vm
μ_0	mag	Magnetische Feldkonstante	$4\pi \cdot 10^{-7}$ VS/Am
ĥ	plank	Plancksches Wirkungsquantum	$6{,}261 \cdot 10^{-34}$ Js
ħ	hbar	h quer	h/2π
û	atommass	Atommasse	$1{,}660540 \cdot 10^{-27}$ kg
·	*	Multiplikation	

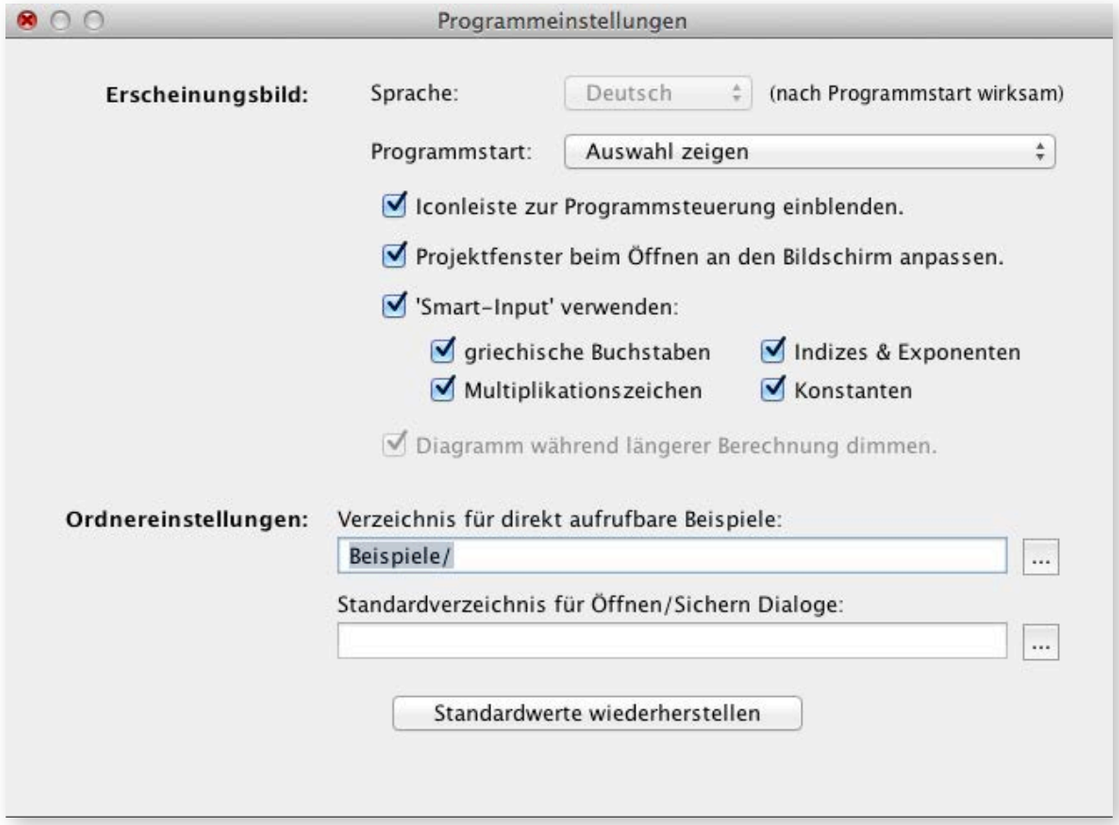
H i n w e i s :

Bei Verwendung der LaTeX-Schreibweise mit vorangestelltem Backslash (z.B. \gravit) wird der Buchstabe sofort ersetzt. Beachten Sie auch, dass in den Voreinstellungen (s.u.) dieses zur Bedingung gemacht werden kann.

Programmeinstellungen

Bei Auswahl des Menüpunkts „Programmeinstellungen“ im Menü „Programme“ erscheint ein Fenster in dem der Nutzer programmspezifische Einstellungen bei Fluxion vornehmen kann:

Das Fenster sieht folgendermaßen aus:

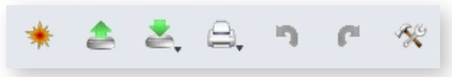


Erscheinungsbild

Die Sprache von Fluxion lässt sich über das Auswahlmenu einstellen. Um eine neu gewählte Sprache zu aktivieren ist ein Neustart von Fluxion nötig.

Für den Programmstart können beliebige Startmodi ausgewählt werden. Soll zum Programmstart direkt ein neues Projekt erstellt werden, verwendet man „Neues Projekt“ erstellen. Ebenso kann man die Modi „Zuletzt verwendetes Projekt öffnen“, „Diaolog zum Öffnen eines Projekts“ oder „Auswahl zeigen“ wählen. „Auswahl anzeigen“ öffnet ein Startfenster, in welchem der Benutzer beim Start wiederum aus den ersten drei Modi wählen kann.

Die Iconleiste zur Programmsteuerung lässt sich in den Programmeinstellungen ebenfalls an/ausschalten.



Das Projektfenster kann zur besseren Übersicht beim Öffnen an de komplette Bildschirmgröße angepasst werden. Dazu setzt man den Haken bei „Projektfenster beim Öffnen an den Bildschirm anpassen“

Bei Programmeinstellungen kann der Nutzer „Smart-Input“ oder auch nur Komponenten von ihr verwenden. Falls „Smart-Input“ nicht zur Verfügung stehen soll, dann entfernt man einfach den Haken vor „Smart-Input verwenden“. Sollen nur Komponenten wie die Eingabe von griechische Buchstaben, Indizes & Exponenten, Multiplikationszeichen oder Konstanten verwendet werden, so klickt man Smart-Input verwenden an und entfernt den oder die Haken bei der oder den nicht gewünschten Komponenten.

Mit dem unteren Auswahlbutton kann festgelegt werden, ob während längerer Berechnungen das Koordinatensystem gedimmt angezeigt werden soll, um zu signalisieren, dass die Berechnung noch läuft.

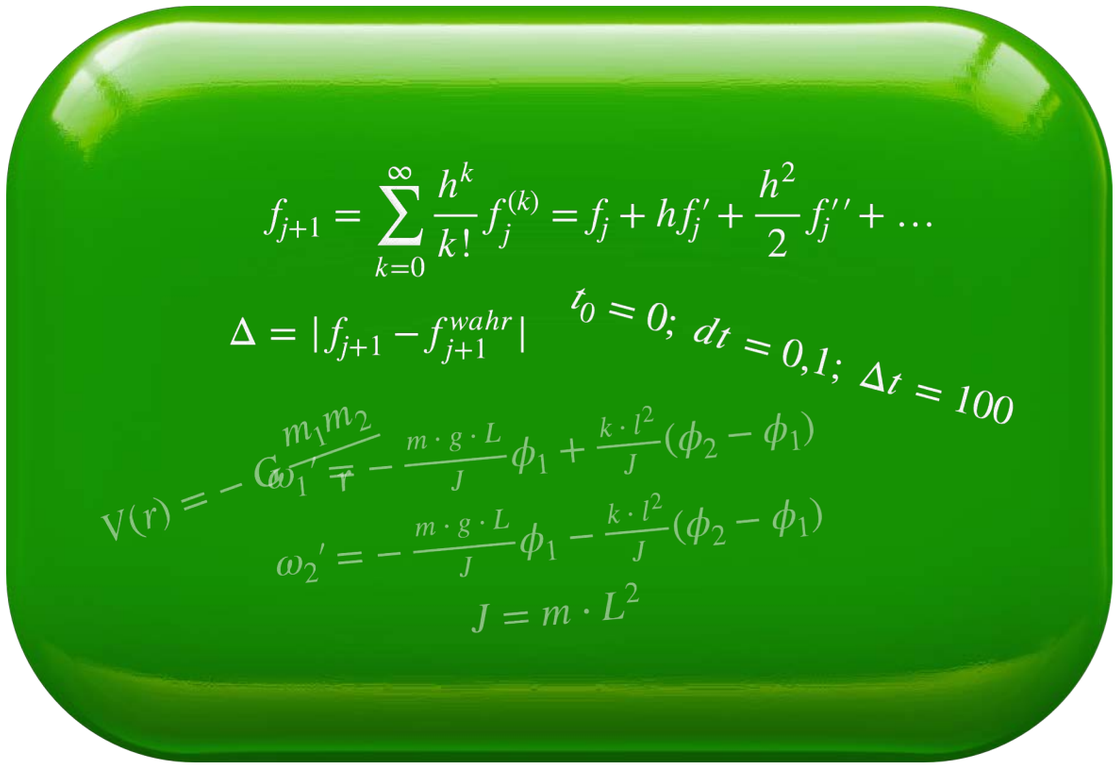
Ordnereinstellungen

Im ersten Eingabefeld wird der Pfad des Ordners angegeben, den Fluxion für die von der Menüzeile direkt aufrufbaren Beispiele verwendet. Mittels des Buttons rechts neben dem Feld kann der Pfad über einen Dialog ausgewählt werden.

Im zweiten Eingabefeld kann der Nutzer einen Standardordner festlegen, der bei Öffnen- oder Speichern-Dialogen als erstes erscheint. Wie oben kann mit dem Button rechts neben dem Eingabefeld der Standardordner mittels eines Dialogs ausgewählt werden. Der Nutzer ist jedoch nicht gezwungen bei Öffnen/Speichern den Standardordner zu benutzen, sondern kann im Öffnen/Speichern-Verzeichnisfenster manuell einen beliebigen Ordner wählen. Ist kein Standardverzeichnis in Programmeinstellungen festgelegt, dann erscheint bei Öffnen und Speichern immer der zuletzt angewendete Ordner.

Bei Klick auf „Standardwerte wiederherstellen“ werden alle vom Benutzer getätigten Änderungen in „Programmeinstellungen“ auf die Standardprogrammeinstellungen von Fluxion zurückgesetzt.

Hintergrund



Eine kurze Einführung in die Welt der numerischen Berechnungsverfahren. Welche Verfahren in Fluxion zum Lösen der Differentialgleichungen zur Verfügung stehen, können Sie hier nachlesen.

Berechnungsverfahren

Im folgenden werden kurz die Berechnungsverfahren erläutert, die Fluxion für die numerische Berechnung der Differentialgleichungen verwendet. Diese lassen sich in den Programmeinstellungen auswählen.

Grundsätzlich ist für die Iteration des Problems eine Taylorentwicklung notwendig. Die Funktion f ist hier die veränderlichee Größe der Differentialgleichung, h entspricht der Schrittweite dt für einen Iterationsschritt (Vgl. Kapitel „Zeiten für Simulation“)

$$f_{j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} f_j^{(k)} = f_j + h f_j' + \frac{h^2}{2} f_j'' + \dots$$

Die erste Ableitung ist durch die explizite Darstellung der DGL bekannt:

$$f_j' = g(t, f(t))$$

entspricht zum Beispiel vereinfacht bei der Newtonschen Bewegungsgleichung:

$$x' = v \cdot t, \quad v' = -g$$

Polygonzug nach Euler

Beim Euler-Verfahren wird die Taylorentwicklung nach der ersten Ordnung abgebrochen. Versucht man sich dies anhand eines Graphen zu verdeutlichen (siehe Abbildung), berechnet man zunächst den ersten Funktionswert zum Zeitpunkt $t = t_0 + k \cdot h;\ k \in N$. mit $k = 1$. Da man an diesem Punkt auch die Ableitung der Funktion kennt, bildet man dort die Tangente und führt diese bis zum nächsten Zeitpunkt für $k = 2$ fort, wo man wiederum die Ableitung bestimmt und eine Tangente bildet usw. So lässt sich mit gegebenen Anfangsbedingungen die Funktion Schritt für Schritt berechnen.

Die Iterationsformel für das Eulerverfahren lautet:

$$f_{j+1} = f_j + h \cdot g(t_j, f_j(t)) \ + O(h^2)$$

Dieses Verfahren ist sehr anschaulich, allerdings stößt es aufgrund seiner hohen Ungenauigkeit schnell an seine Grenzen, denn es führt zu einem Iterationsfehler der Ordnung $O(h^2)$. Das Eulerverfahren lässt sich aber durch wenige Änderungen sehr schnell verbessern.

Trapezverfahren nach Heun

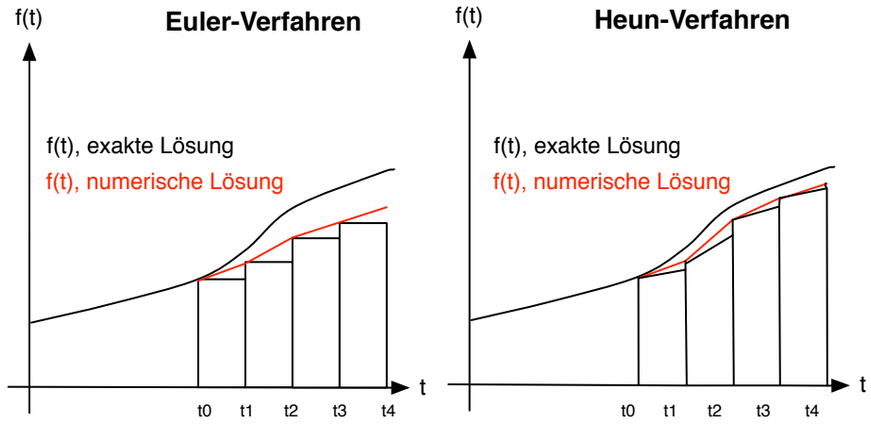
Wie der Name schon sagt, wird beim Heunverfahren statt der Tangente ein Trapez zur Näherung an die zu berechnende Funktion verwendet. Die Rechenvorschrift für das Heun-Verfahren lautet:

$$f_{j+1} = f_j \ + \frac{h}{2}[g(t_j, f_j(t)) + g(t_{j+1}, f_{j+1})] \ + O(h^3)$$

mit $g(t_{j+1}, f_j + h \cdot g(t_j, f_j))$ nach Euler

Man erkennt, dass bei Heun zunächst die Stelle f_{j+1} auftaucht. Dieses Problem wird umgangen, indem der Funktionswert dieser Stelle zunächst nach Euler berechnet wird und für in den Heun-Algorithmus verwendet wird.

Man erhält den Mittelwert der Steigungen an den Stellen f_j und f_{j+1} . Welcher für die Fortführung der Funktion **f** verwendet wird.



Runge-Kutta Standard (RK4)

Runge-Kutta-Verfahren gehören zu den Einschrittverfahren, das heißt, dass bei einem Iterationsschritt nur der vorherige Funktionswert für die Berechnung notwendig ist. Dafür wird die Funktion innerhalb eines Schrittes mehrmals aufgerufen. Das einfachste Verfahren ist das RK2-Verfahren, welches ebenfalls eine Erweiterung des Euler-Verfahren (RK1) darstellt. Hier wird das Euler-Verfahren für eine halbe Schrittweite bestimmt und die ermittelte Steigung für den ganzen Schritt verwendet. RK2 steht für Runge-Kutta 2. Ordnung.

Nach diesem Schema lassen sich die RK-Algorithmen auch für höhere Ordnungen definieren. Mit größeren Ordnungen erhöht sich allerdings die Komplexität des Algorithmus und es kann zu numerischen Instabilitäten kommen.

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren ist das RK4, 4. Ordnung, welches wie folgt definiert ist:

$$k_1 = h\, g(t_j, f_j(t))$$

$$k_2 = h\, g(t_j + \frac{h}{2}, f_j(t) + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = h\, g(t_j + \frac{h}{2}, f_j(t) + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = h\, g(t_j + h, f_j(t) + k_3)$$

$$f_{j+1} = f_j + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$$

Runge-Kutta mit Schrittweitenanpassung (RK-S)

Bei numerischen Berechnungen stellt sich aber nicht nur die Frage, wie genau man ein Problem berechnen kann, sondern welchen Fehler man bei den Iterationsschritten macht. Der Fehler ist die Abweichung der Berechneten Kurve von der „wahren Funktion“.

$$\Delta = | f_{j+1} - f_{j+1}^{wahr} |$$

Da die „wahre Funktion“ nicht bekannt ist, verwendet RK-S zwei RK-Algorithmen verschiedener Ordnungen miteinander. Eine der beiden RKs liefert ein genaueres Ergebnis und liefert nach obiger Formel eine Abweichung. Die beiden Ordnungen werden in der Literatur meist mit q und p bezeichnet. Fluxion verwendet hier:

$$q = 5 \quad p = 4$$

Ziel ist es nun eine bestimmte Genauigkeit ϵ pro Schritt vorzugeben für den Fehler Δ vorzugeben. Mit der Schrittweitenanpassung wird die Schrittweite für den aktuellen Iterationsschritt so gewählt, dass die Abweichung maximal ε beträgt. Ist diese größer, wählt der Algorithmus eine kleinere Schrittweite nach folgender Formel:

$$h_{neu} = 0.9 \cdot h(\epsilon/\Delta)^{1/(p+1)}$$

p ist die Ordnung der Kontrollformel, der Faktor 0.9 sorgt für statistischer Anpassung.

Der Wert für ϵ kann für das RK-S Verfahren in den Programmeinstellungen angepasst werden.

Vergleich der Berechnungsverfahren

Für einfache physikalische Modelle und kleinen Iterationsschritten liefern alle vier Verfahren sinnvolle Ergebnisse. Allerdings sollte man sich immer im Klaren sein, wie genau man eine numerische Berechnung durchführen will und an welcher Stelle Abschätzungen vertretbar sind.

In der folgenden Grafik werden die vier möglichen Berechnungsverfahren anhand einer Planetenbewegung verglichen. Diese bewegen sich im Gravitationspotential:

$$V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

G ist hier die Gravitationskonstante (Smart-Intput= Gravit), r der Betrag des Relativvektors

$$r = |\vec{r}| = |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$$

1. Geben Sie zum Vergleich der Berechnungsverfahren folgende Gleichungen in das Modellfenster ein:

$$x' = vx; y' = vy; z' = vz;$$
$$vx' = ax; vy' = ay; vz' = az;$$
$$ax = Fx/m; ay = Fy/m; az = 0;$$
$$Fx = -G \cdot m \cdot M/r^2 \cdot x/r;$$
$$Fy = -G \cdot m \cdot M/r^2 \cdot y/r;$$
$$r = sqrt(x^2 + y^2)$$
$$m = 100; M = 1e9;$$

2. Definieren Sie dazu als zusätzliche veränderbare Variable:

$$V_0 = 0.15$$

3. Legen Sie die Startbedingungen fest:

$$x(t_0) = 1; y(t_0) = 0; z(t_0) = 0; vx(t_0) = 0; vy(t_0) = v_0; vz(t_0) = 0;$$

4. Für die Berechnung wählen Sie für Startzeit t_0 , Schrittweite dt, Zeitintervall Δt:

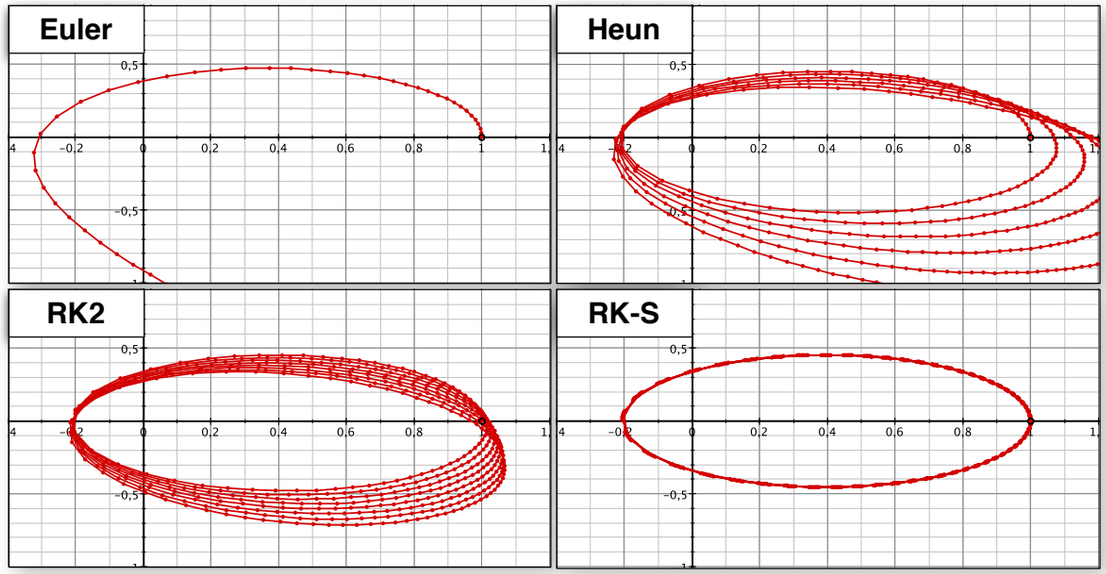
$$t_0 = 0;\ dt = 0{,}1;\ \Delta t = 100$$

5. Für die Achsen verwenden sie die x-y-Ebene: Rechtsachse x; Hochachse y;
6. Starten Sie die Simulation.

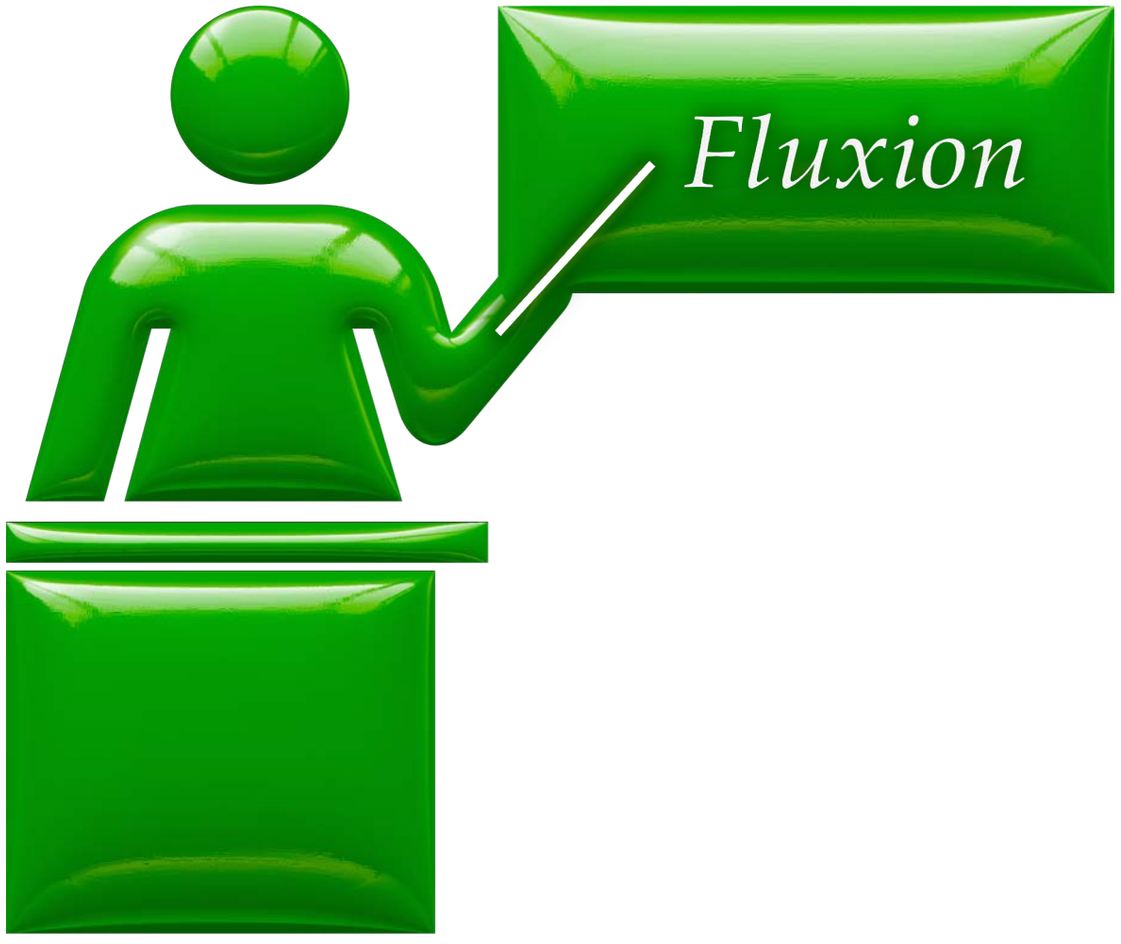
Nun können unter Programmeinstellungen die verschiedenen Algorithmen ausgewählt werden und verglichen werden.

In unten stehender Grafik sind die Trajektorien der vier Verfahren abgebildet. Man erkennt, dass beim Keplerproblem nur RK-S die Physikalischen Gesetzte beachtet. Bei den übrigen Verfahren wird die E-

nergieerhaltung verletzt und die numerische Berechnung liefert eine instabile Planetenbahn.



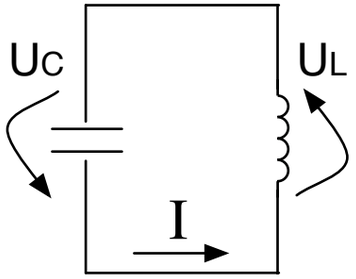
Tutorials



Die Tutorials dienen für den ersten Einstieg in Fluxion. Anhand physikalischer Problemer werden die einzelnen Funktionen von Fluxion erklärt. Dabei wird die numerische Lösung dieser Probleme und dabei nötige Berechnugnsangangen durch eine „Schritt für Schritt“-Anleitung erklärt.

Elektrischer Schwingkreis

Ein einfaches Modell der Elektrizitätslehre ist der „ideale passive Schwingkreis“. Dieser besteht aus einer Spule und einem Kondensator. Für den idealen Fall wird angenommen, dass während des Schwingvorgangs keine Verluste in den Bauteilen und deren Zuleitungen auftreten.



Somit ist während einer Schwingung die Energieübertragung der elektrischen Feldenergie im Kondensator in das Magnetfeld der Spule verlustfrei.

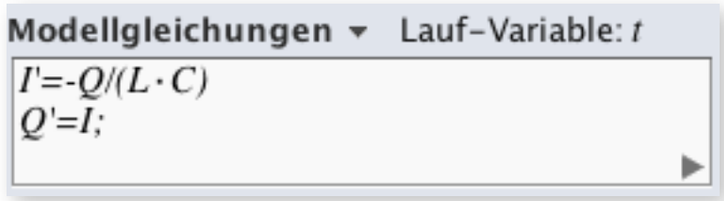
Beim idealen passiven Schwingkreis gilt nach Kirchhoff:

$$U_L + U_C = 0 \qquad (1)$$

Durch einsetzten der jeweiligen Spannungen $U_C = \frac{Q}{C}$ und $U_L = L \cdot I'$ kann dieser Schwingvorgang durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben werden:

$$I' = -\frac{1}{L \cdot C} Q \quad (2) \quad \text{mit } Q' = I \quad (3)$$

1. Öffnen Sie ein neues Projekt und geben Sie diesem den Namen „Schwingkreis“
2. Geben Sie die Formeln (2) und (3) in das Fenster „Modellgleichungen“ ein.



3. Unterhalb der eingegebenen Formeln können nun die Werte von C = 1E – 7 und L = 0,01 definiert werden. Der Anfangswert der Ladung wird über die Kondensatorspannung Ub mit 5V definiert:

$$Q_0 = \frac{Ub}{C}; \quad Ub = 5;$$

Hinweis: in Fluxion einheitenlos, also SI Einheiten

4. Sollen diese als veränderbare Parameter definiert werden, klicken sie auf das + unterhalb des Definitionsfensters. Durch Doppelklick auf den Parameternamen können Sie diesen in C (bzw. L) ändern. Maximum und Minimum des Schiebereglers können durch Doppelklick auf diese Weise ebenfalls geändert werden. Dabei sollte das Minimum bei C = 1E – 7 und das Maximum bei C = 1E – 6 liegen.
5. Geben Sie die Startwerte ein:

$$Q(t_0) = Q_0; I(t_0) = 0;$$

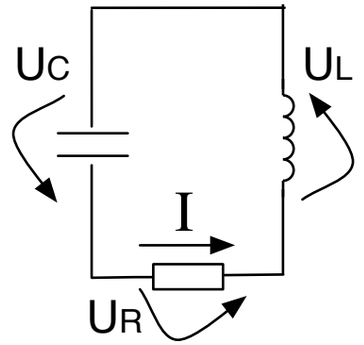
6. Für die Berechnung wählen Sie für Startzeit t_0 , Schrittweite dt, Zeitintervall Δt :

$$t_0 = 0; \quad dt = 2E-6; \quad \Delta t = 1E-3$$

7. Wählen Sie für die Rechtsachse t und für die Hochachse Q aus.
8. Starten Sie die Simulation
9. Um die Simulation nach einer Periode abzubrechen, geben Sie unter den Startwerten die Bedingung für „Abbrechen wenn“: $t > \frac{2\pi}{\omega}$. Dafür muss dann im Definitionsfenster noch die Frequenz ω angegeben werden: $\omega = sqrt(L \cdot C)^{-1}$
   (Tipp: Eingabe griechische Buchstaben am besten via Smart-Input eingeben!)
10. Durch eine Vergleichsfunktion kann überprüft werden, ob der Graph einen Kosinus darstellt: Setzten Sie dazu einen Haken vor „Vergleichsfunktion(en). Durch Klicken auf den Pfeil wählen Sie unter „Trigon. Funktionen“ den „Kosinus m. Vorfaktor“ aus. Ändern Sie den angegebenen Term zu $Q(t) = Q_0 \cos(\omega \cdot t)$.

Passiver Schwingkreis mit Dämpfung

Für den realen Schwingkreis muss der Ohmsche Widerstand aller Bauteile im Schwingkreis berücksichtigt werden. Als Vereinfachung führt man hierfür einen Ersatzwiderstand R ein, in welchem alle auftretenden Widerstände zusammengefasst werden.



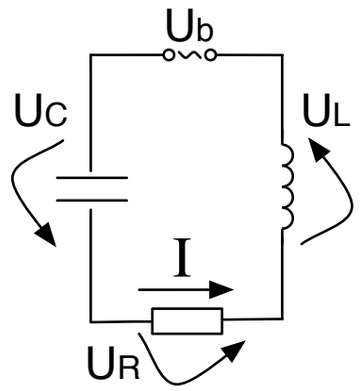
Dieser Ersatzwiderstand dämpft die Schwingung des Systems. Am Widerstand R geht also Energie verloren und die maximale Amplitude der Spannung an Kondensator und Spule nehmen mit der Zeit ab.

1. Löschen sie die „Abbrechen, wenn“ Bedingung.
2. Nach Kirchhof gilt nun $U_L + U_C + U_R = 0$ und damit für den zeitlichte Veränderung des Stroms $I' = -1/(L \cdot C) \cdot Q - R/L \cdot I$ und $Q' = I$. Erweitern Sie die Modellgleichung für die Zeitableitung des Stroms und fügen Sie den veränderlichen Parameter $R = 50$ (durch Klicken des +) hinzu.
3. Mit Hilfe einer Vergleichsfunktion kann nun die Einhüllende der Funktion dargestellt werden. Dazu definieren Sie im Definitionsfenster die Dämpfung $\delta = R/(2 \cdot L)$ und geben die Vergleichsfunktion wie folgt an: $Q(t) = Q_0 \exp(-\delta \cdot t)$.

4. Starten Sie die Simulation.

Angeregter Schwingkreis mit Dämpfung

Der aktive Schwingkreis wird mit einer Wechselspannung Ub angetrieben $U_L + U_C + U_R = Ub$.



1. Erweitern Sie die Formel des passiven Schwingkreises wie folgt:

$I' = -1/(L \cdot C) \cdot Q - R/L \cdot I + 1/L \cdot Ub$ und $Q' = I$

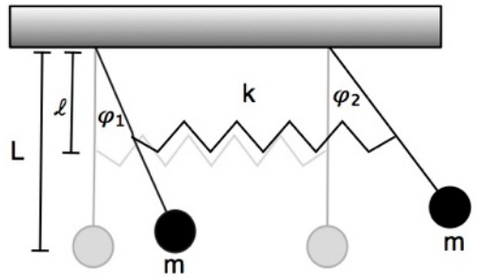
Für diese DGL muss im Definitionsfenster noch die Spannung $U_b = \sin(5\omega t)$ definiert werden.

2. Löschen Sie die Startwerte und Starten Sie die Simulation.

3. Um zu sehen welchen Einfluss die Dämpfung auf den Schwingkreis hat, kann man für den Widerstand R eine „bedingte Variable definieren“. Dazu klicken Sie im Definitionsfenster auf das Dreieck. Im Fenster „Zusatzdefinitionen festlegen“ fügen Sie eine neue Variable durch klicken des + hinzu. Im Feld Name definiert man die Variable „R“ vom Typ „Bedingte Variable“. Für $t > 5E-4$ ist dann R=100 und sonst R=0. Somit schaltet sich der Widerstand erst ein, sobald die Zeit 5E-4 verstrichen ist.

Gekoppeltes Pendel (Mehrere Koordinatensysteme)

Werden zwei aufgehängte Massen m mit einer Feder verbunden entsteht ein System, welches bei kleinen Winkeln durch zwei gekoppelte Differentialgleichungen beschrieben werden kann.



$$\omega_1' = -\frac{m \cdot g \cdot L}{J}\phi_1 + \frac{k \cdot l^2}{J}(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\omega_2' = -\frac{m \cdot g \cdot L}{J}\phi_1 - \frac{k \cdot l^2}{J}(\phi_2 - \phi_1)$$

$$J = m \cdot L^2$$

l = Strecke bis zur Befestigung der Feder, L = Pendellänge, k = Federhärte, J = Trägheitsmoment. ϕ = Winkel zur Ruhelage, ω = Winkelgeschwindigkeit

1. Geben Sie die drei oben genannte Gleichungen ein. Die Fallbeschleunigung g kann durch Smart-input „gravit" hinzugefügt werden. Zusätzlich müssen dann noch folgende Zusätze definiert werden:

$$\phi_1' = \omega_1; \quad \phi 2' = \omega_2$$

2. Danach müssen die Parameter m , I , L , k entweder im Fenster „Modellgleichungen" oder als Zusatzvariable (Klicken auf das „+" Symbol) definiert werden. (z.B.: m = 1; I = 0.5; L = 1, k = 1;)
3. Startwerte festlegen:

$$\omega_1(t_0) = 0; \omega_2(t_0) = 0; \phi_1(t_0) = 0.5; \phi_2(t_0) = 0;$$

4. Für die Berechnung wählen Sie für Startzeit t_0 , Schrittweite dt, Zeitintervall Δt:

$$t_0 = 0; \quad dt = 0.08 \quad \Delta t = 80;$$

5. Wählen Sie aus dem Menuleiste → Diagramm → **Zwei Koordinatensysteme übereinander**. Durch Klicken in die Koordinatenfenster werden links die Einstellungen für die Achsen aktiv. Für das erste Koordinatensytem verwenden Sie für die Rechtsachse t und für die Hochachse ϕ_1 . Klicken Sie auf das untere Koordinatenfenster und wählen für die Rechtsachse ebenfalls t und für die Hochachse ϕ_2 .
6. Starten Sie die Simulation. Nun sind die Auslenkungen ϕ_1 und ϕ_2 der beiden Pendelbewegungen in zwei verschiedenen Koordinatensystemen dargestellt.

Mit Fluxion lassen sich nun auch ganz einfach die Energien des Systems darstellen. Die Gesamtenergie des Systems bleibt dabei erhalten:

1. Fügen Sie den Modellgleichungen die Formeln für die Energie hinzu:

$$E_1 = 0.5 \cdot J \cdot \omega_1; \quad E_2 = 0.5 \cdot J \cdot \omega_2;$$

$$E_{grav} = -2 \cdot m \cdot \hat{g} \cdot L$$

$$E_{Fed} = 0.5 \cdot k \cdot l^2 \cdot (\phi_2 - \phi_1)^2$$

$$E_{ges} = E_1 + E_2 + E_{grav} + E_{Fed}$$

$E_{1,2}$ = kinetische Energie der Pendelbewegungen

E_{grav} = potentielle Energie durch die Erdbeschleunigung

E_{Fed} = potentielle Energie der Feder

2. Wählen Sie aus der Menuleiste → Diagramm → Vier Koordinatensysteme.

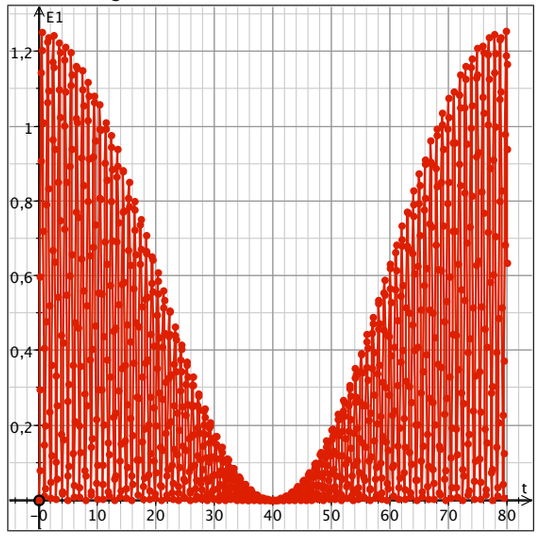
Verwenden Sie für alle Rechtsachsen t, für das die Hochachsen:

links oben: E1; rechts oben: E2; links unten E1+E2, rechts unten: Eges

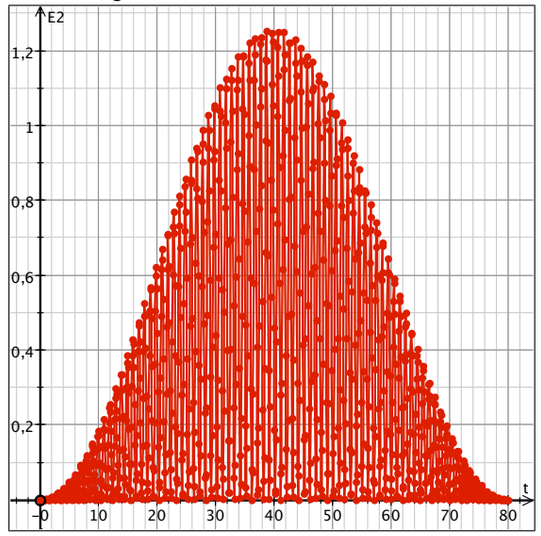
3. Starten Sie die Simulation.

Der Theorie nach sollte die Gesamtenergie des Systems konstant bleiben (Energieerhaltung). Im Koordinatensystem 4 (rechts unten) ist allerdings deutlich eine Oszillation zu erkennen. Bei einem kleineren Startwinkel (z.B. $\phi_1(t_0) = 0.1$) ist dieser Effekt deutlich kleiner. Hier erkennt man sehr gut die Auswirkungen der Kleinwinkelnäherung. Der Vorteil bei der Numerischen Berechnung des Problems liegt darin, dass Fluxion die Berechnungen auch ohne Kleinwinkelnäherung durchführen kann.

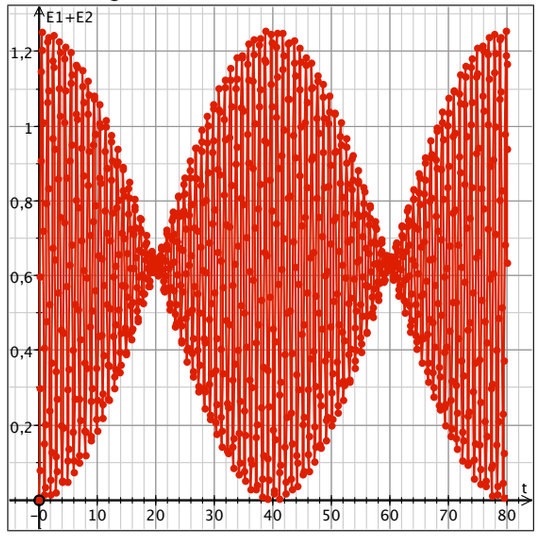
Darstellung 1: E1 als Funktion von t



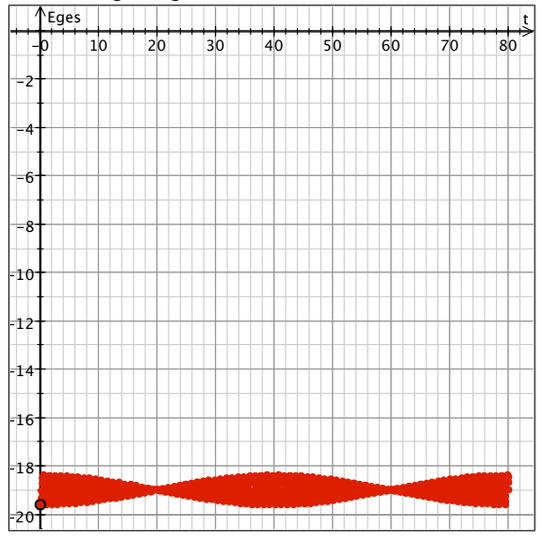
Darstellung 2: E2 als Funktion von t



Darstellung 3: E1+E2 als Funktion von t



Darstellung 4: Eges als Funktion von t



Gekoppeltes Pendel ohne Kleinwinkelnähe-rung

1. Ändern Sie die Modellgleichungen aus dem Kapitel „Gekoppeltes Pendel“ um zu:

$$\omega_1' = -\frac{m \cdot g \cdot L}{J} \sin(\phi_1) + \frac{k \cdot l^2}{J}(\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$$

$$\omega_2' = -\frac{m \cdot g \cdot L}{J} \sin(\phi_1) - \frac{k \cdot l^2}{J}(\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))$$

$$J = m \cdot L^2$$

Für die Energien verwenden Sie im Fall ohne Kleinwinkelnäherung folgende Modellgleichungen:

$$E_1 = 0.5 \cdot J \cdot \omega_1; \quad E_2 = 0.5 \cdot J \cdot \omega_2;$$

$$E_{grav} = -m \cdot \hat{g} \cdot L \cdot (\cos(\phi_2 + \cos(phi_1))$$

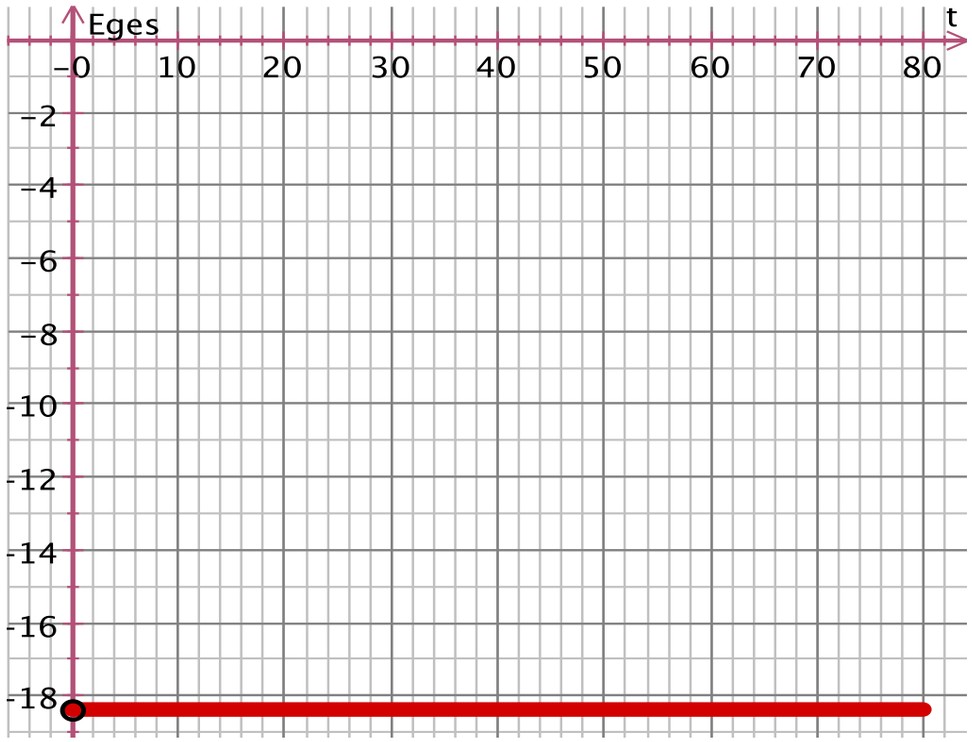
$$E_{Fed} = 0.5 \cdot k \cdot l^2 \cdot (\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1))^2$$

$$E_{ges} = E_1 + E_2 + E_{grav} + E_{Fed}$$

2. Starten Sie die Simulation

Durch die Kleinwinkelnäherung treten Abweichungen bei der Betrachtung der Energien auf, so dass die Gesamtenergie nicht konstant ist. Führt man die Berechnungen ohne die Näherung durch, so ist auch die physikalisch geforderte Energieerhaltung erfüllt.

Für die numerische Iteration ist es grundsätzlich notwendig, das die Erhaltungsgrößen eines Systems respektiert werden.



Impressum

herausgegeben von:

Lehrstuhl der Physik und ihre Didaktik, Fakultät für Physik und Astronomie der Universität Würzburg:

Sebastian Weißenseel
Dr. Stephan Lück

© 2018 Universität Würzburg

Fassung 1.5
für Fluxion Version 2

Internetseite des Lehrstuhls:
http://pid.physik.uni-wuerzburg.de
Softwareseite des Lehrstuhls:
http://did-apps.physik.uni-wuerzburg.de

Erweiterte Definitionen

Im Eingabebereich der Modellgleichungen lassen sich noch weitere Definitionen festlegen. Dazu zählen Konstanten, Funktionen, so wie Tabellen und bedingte Variablen.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 3 - Erweiterte Definitionen

Modellgleichungen

Die Modellgleichungen stellen die Gleichungen dar, die das vorliegende Physikalische Problem anhand Differentialgleichungen beschreiben. Diese müssen im Simulationsbereich im Fenster Modellgleichungen eingegeben werden.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Simmulationsbereich

Programmeinstellungen

In den Programmeinstellungen lassen sich allgemeine programmspezifische Einstellungen zum Beispiel zum Erscheinungsbild von Fluxion sowie den Ordnereinstellungen vornehmen.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 3 - Programmeinstellungen

Projekt

Ein Fluxion-Projekt beinhaltet alle Informationen die zur Berechnung der Modelle nötig sind. Dazu werden in diesem Projekt die Projektinformationen, alle Vergleichsdaten bzw. Vergleichsfunktionen sowie Skalierung der Koordinatensysteme gespeichert.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Menuzeile

Projektinformationen

In den Projektinformationen kann der Benutzer weitere Erklärungen zum berechneten Modell machen, bzw nähere Informationen zu den verwendeten Differentialgleichungen. Dort können für nähere Erläuterungen auch Bilddateien eingefügt werden.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 3 - Projektinformationen

Simulationsbereich

Der Simulationsbereich befindet sich in der linken Fensterhälfte. Hier werden alle nötigen Angaben zur Berechnung der Differentialgleichungen angegeben.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Simmulationsbereich

Smart Input

Mit dem Smart Input lassen sich griechische Buchstaben sowie vordefinierte Naturkonstanten einfach einfügen. In der Tabelle sind die Kürzel für die schnelle Eingabe angegeben.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 3 - Smart Input

Veränderbarer Parameter

Durch den Schieberegler können die Parameter der Modellgleichung schnell verändert werden. Dazu lassen sich die Grenzen für den Schieberegler einfach durch Klicken auf die Zahlen verändern.

Im Diagrammbereich werden die Berechnungen aktualisiert dargestellt, sofern in der Aktionsleiste der Knopf „Simualtion kontinuierlich ausführen“ aktiviert ist.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Simmulationsbereich

Vergleichsfunktion

Mit einer Vergleichsfunktion, kann man die berechnete Lösung mit anderen Funktionen vergleichen. Zum Hierfür sind einige Standardfunktionen vordefiniert, neben welchen auch Funktionen nach persönlichem Wunsch definiert werden können. Der Graph der Vergleichsfunktion wird im Diagrammbereich blau dargestellt.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Simmulationsbereich

Vergleichswerte

Über das Menu „Tabelle“ lässt sich eine eigene Tabelle für Vergleichswerte einblenden, in die der Benutzer eigene Werte zum Beispiel einer Messung eintragen und im Diagramm darstellen kann.

Verwandte Glossarbegriffe

Zugehörige Begriffe hierher ziehen

Index Begriff suchen

Kapitel 2 - Simmulationsbereich